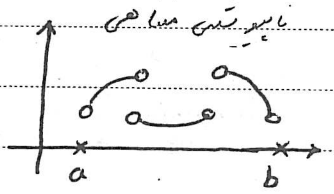
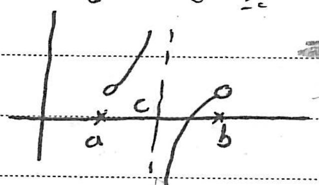
تابع به طور قطعه‌ای پیوسته؟

تابع $f(x)$ را بر بازه (a,b) به طور قطعه‌ای پیوسته گوییم هرگاه حداکثر تعداد متناهی ناپیوستگی متناهی در این بازه داشته باشد.

(تعداد نقاط ناپیوستگی $f(x)$ در این بازه متناهی بوده، در هر نقطه ناپیوستگی حد چپ و راست موجود باشد، در a حد راست و در b حد چپ موجود باشد)

مثال:





هر سری فوریه یک سری مثلثاتی به فرم $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ است (عکس این مطلب برقرار نیست).

سری تیلور به $x=x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

سری مک‌لورن (حول $x=0$): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

بسط تیلور $f(x)$ حول x_0: $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\dots$

$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\dots$

بسط مک‌لورن $f(x)$ حول: $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots$

فاصله همگرایی $(-\infty,\infty)$

چندجمله‌ای: عبارتی برحسب x که توان‌های آن طبیعی است.

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x\in\mathbb{R}$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

PAPCO

به شرطی که دامنه هم متقارن باشد: زوج $\forall x \quad f(-x)=f(x)$ ، فرد $\forall x \quad f(-x)=-f(x)$

سری زوج: سری که توان های آن زوج باشد.
سری فرد: سری که توان های آن فرد باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ فرد

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!}$ زوج

$\xrightarrow{+} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (نه زوج) (نه فرد)

سؤال ۱) e بین کدام دو عدد است؟

$x=1 \Rightarrow e = \underbrace{1+1+\frac{1}{2!}}_{2.5} + \frac{1}{3!} + \cdots$

$\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ② ① $\Rightarrow 2.5 < e < 3$

فاصله همگرایی

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

$[a, aq, aq^2, \ldots \qquad S_\infty = \frac{a}{1-q}]$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

سؤال ۲) بدست آوردن عدد π

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \xrightarrow{\int} \mathrm{Arc}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

$x=1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$

نکته: $\ln x$ بسط مک لورن ندارد و بسط تیلور دارد.

تابع:
- مک لورن ✓ (e^x ، $\cos x$ ، $\sin x$) و همه جا با خودش برابر است.
- مک لورن ✓ ولی همه جا با خودش برابر نیست.
- مک لورن ✗ ندارد.

$$\forall n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\begin{cases}2\pi & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

(۲)

$$\forall n\in\mathbb{Z} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$$

$$\begin{cases} f(x)\ \text{فرد} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0 \\ f(x)\ \text{زوج} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال ۳) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ ، در اینجا $f^{(7)}(0)$ را بیابید:

ضریب $x^n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}\times\frac{1-x}{1-x}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)$$

ضریب $x^7 = \dfrac{f^{(7)}(0)}{7!} \Rightarrow f^{(7)}(0) =$ ضریب $x^7 \times 7!$

$$f^{(7)}(0) = -1\times 7!$$

قضیه: نمایش یک سری فوریه به شکل

① هرگاه $f(x)$ متناوب و با دوره تناوب $T=2\pi$ باشد ($f(x+2\pi)=f(x)$)

② و بر بازه $-\pi<x<\pi$ به طور قطعه‌ای پیوسته باشد و ... می‌توان سری فوریه آن را نوشت و اگر در هر نقطه این بازه مشتقات چپ و راست $f(x)$ موجود باشد] در هر نقطه پیوستگی به $f(x)$ همگرا است. *

③ نکته: توابع نامتناوب سری فوریه ندارند پس شرط لازم تناوب تابع است.

④ از نظر عوارض هموار باشد و تیز نباشد.

⑤ * مقدار تابع با مقدار سری در نقاط پیوستگی برابر است و چنانچه x_0 یک نقطه ناپیوستگی باشد، مقدار سری در x_0 برابر است با میانگین حد چپ و حد راست $f(x)$ در x_0

$$x=x_0 \quad \text{مقدار سری در } x_0 = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

روش محاسبه ضرایب

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

① $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=2\pi a_0$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$\forall m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$

Subject:

Year. × cos Month. Data. ∑ 1 ( )

$\begin{cases} \text{زوج} = \text{فرد} \times \text{فرد} \\ \text{فرد} = \text{فرد} \times \text{زوج} \\ \text{زوج} = \text{زوج} \times \text{زوج} \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx$

② $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \right.$

$= \pi a_m$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

اگر زوج باشد

$\forall m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx \right) = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

تست

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 5x \, dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 7x \, dx = \pi$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$ به طور مشابه.

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

f زوج / فرد — a_0 — a_n — ۸ ها

نکته: f زوج ⇒ b_n ها صفر اند. (باید جمله فرد داشته باشد.)
f فرد ⇒ a_0 و a_n ها صفر اند (باید جمله زوج داشته باشد.) f

تابع ثابت، یک تابع زوج است
تابع صفر، هم زوج و هم فرد است

① متناوب بودن، $T = 2\pi$

② بازه ۷ و

مثال ۴) سری فوریه $f(x) = x$ ، $-\pi < x < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را بنویسید

به طور قطعه‌ای پیوسته (یا به شکل)

به کمک آن مجموع زیر را بیابید: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳

$*\cos n\pi = (-1)^n$ } $f(-x) = -f(x)$ دامنه متقارن است.

در این مثال $f(x) = x$ فرد است پس برای a_0 و a_n صفر اند

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big]_0^{\pi}\right)$$

(زوج، فرد، فرد) (انتگرال جزء به جزء) (مشتق گیری تا رسیدن به جمله صفر)

x	+	$\sin nx$
1	−	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$$

(جملات را می نویسیم)

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right)$$ سری فوریه

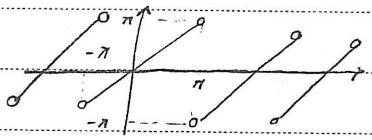
نقطه پیوسته: $x = 0 \Rightarrow 0 = 0$

نقطه پیوسته: $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 4K \\ 1 & n = 4K+1 \\ 0 & n = 4K+2 \\ -1 & n = 4K+3 \end{cases}$$

$\sin\frac{17\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{15\pi}{2} = -1$ نکته مهم:

نقطه ناپیوسته: $x = \pi$ در سری مقدار $= \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$



۵) سری فوریه $f(x) = x^2$ و $-\pi < x < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را بیابید و به کمک آن مجموع
(① بازه ② متناوب بودن $T = 2\pi$) (به طور قطعه ای پیوسته (نیاز به شکل))

سری های زیر را بیابید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

همگرا است.

نکته: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگرا $p > 1$، واگرا $p \leq 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دامنه تقارن $f(-x)=f(x)$

در این مثال $f(x)=x^2$ زوج است پس b_n ها صفر می شوند.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x^2\cos nx}_{\text{زوج}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2x}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{n^3}\sin nx\Big]_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right)=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

x^2	$+\cos nx$
$2x$	$-\frac{1}{n}\sin nx$
2	$+\;-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\;-\frac{1}{n^3}\sin nx$

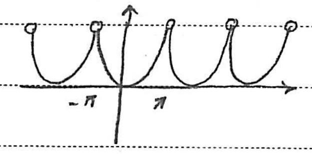
$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\dots\right)$$ سری فوریه

$$x=0\Rightarrow 0=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\dots\right)$$

نقطه پیوسته $\div 4$

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\dots\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$



$x=\pi$ در سری مقدار سری $=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi^2+\pi^2}{2}=\pi^2$ *

نقطه ناپیوسته

* (گذاشتن در سری) : $\frac{\pi^2}{3}+4\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots\right)=\pi^2$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

حق نداشتیم مستقیم $x=\pi$ در سری بذاریم، ابتدا با فرمول مقدار سری را در $x=\pi$ حساب کرده و سپس در خود سری می گذاریم.

نکته: هرگاه $f(x)$ متناوب و با دوره تناوب $T=2\pi$ باشد:

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_c^{c+2\pi}f(x)dx\quad\forall c\in\mathbb{R}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(x) = x^2 \quad , \quad 0 < x < 2\pi \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x+2\pi)^2 & -2\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < 2\pi \\ (x-2\pi)^2 & 2\pi < x < 4\pi \\ (x-4\pi)^2 & 4\pi < x < 6\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (x-2\pi)^2\,dx = \frac{8\pi^3}{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} (x+2\pi)^2 + \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^3}{3}$$

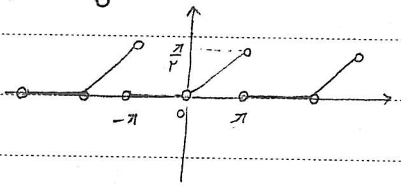
سؤال ۶) امتحانی: سری فوریه $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$ به دست آورده، به کمک آن مجموع $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ را بیابید.

② بازه‌ی $\sqrt{}$ قطعه‌ای پیوسته (با به شکل)

① متناوب بودن $\sqrt{}$ $[T = 2\pi]$

* در $x=0$ نقطه‌ی ناپیوسته، مقدار با حد برابر نیست

$f(x)$ نه زوج است نه فرد. [یادگیری: دامنه متقارن نیست].



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{4}\Big]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{8\pi} \rightarrow a_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{n^2}(\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) *$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} *$$

* x | $\cos nx$; 1 | $\frac{1}{n}\sin nx$; 0 | $-\frac{1}{n^2}\cos nx$

* x | $\sin nx$; 1 | $-\frac{1}{n}\cos nx$; 0 | $-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\sin nx\right)$$ سری فوریه

مقدار سری در $x=0$ $= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ $\qquad 0 = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}\left(-2 - \frac{2}{9} - \frac{2}{25} - \cdots\right) \xrightarrow{x=1} \frac{\pi}{8} = \frac{2}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \longrightarrow 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

به طور کلی هرگاه $f(x)$ متناوب و با دوره تناوب $T = 2l$ باشد، سری فوریه $f(x)$ و ضرایب آن به شرح زیر است: ($2l$)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

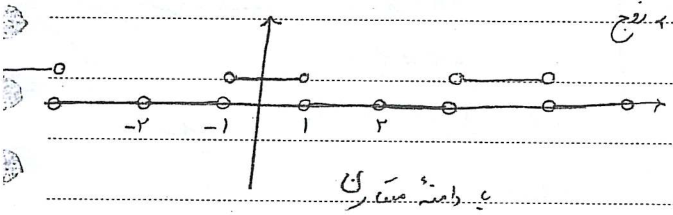
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

---

۷) سری فوریه
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2<x<-1 \\ K & -1<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$$
و $f(x+4) = f(x)$ را بدست آورده به کمک آن مجموع $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ را بدست آورید.

نسبت به y ها تقارن دارد ← زوج



با دامنه متقارن

در این مثال $f(x)$ زوج است پس b_n ها صفرند (خودکار)

$f(\frac{1}{2}) = K$

$f(\frac{7}{2}) = f(\frac{7}{2} - 4) = f(-\frac{1}{2}) = K$

$f(-\frac{1}{2}) = K$

[K را ثابت فرض می‌کنیم.]

$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(0 + \int_{-1}^{1} K\,dx + 0\right) = \frac{K}{2}$$

که سه بار بشکنیم.

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = K\int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = K\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{2K}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{K}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2K}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{K}{2} + \frac{2K}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}\cdots\right)$$

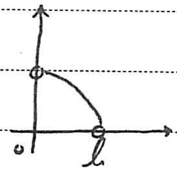
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x=0 \longrightarrow K=\frac{K}{2}+\frac{2K}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots\right) \rightsquigarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots=\frac{\pi}{4}$

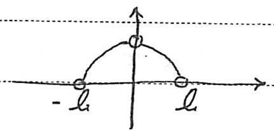
سری‌های نیم‌دامنه‌ای یا نیم‌بعدی، یا توسیع‌های زوج و فرد)

یا [سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی]



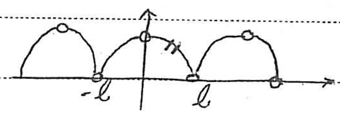
$f(x)$ ، $0<x<l$: ① متناوب نیست ② فقط نیمه تعریف شده است — پس سری فوریه ندارد

باید آن را گسترش دهیم، مرحله اول:



g زوج : $g(-x)=g(x)$

مرحله دوم



و متناوب $g(x+2l)=g(x)$

$g(x)=f(x) \qquad 0<x<l$

$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}g(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

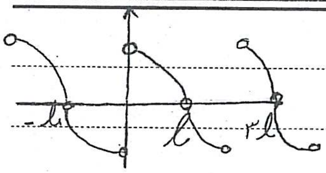
$0<x<l \longrightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$ سری فوریه کسینوسی $f(x)$

$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$

$a_n=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$

توسیع زوج $f(x)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$f(x)\,,\ 0<x<l$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$h(-x)=-h(x)$ h فرد

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} h(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$h(x+2l)=h(x)$ h متناوب

$$=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$h(x)=f(x)$ $0<x<l$

$0<x<l \rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$ توسیع فرد $f(x)$

$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$ سری فوریه سینوسی $f(x)$

این دو سری در بازه $0<x<l$ برابرند و متناوب $2l$. $2l$ اضافه کنیم در آن بازه ها هم برابر می شند

مثال. سری فوریه سینوسی $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<\pi$ را به دست آورده و به کمک آن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ را محاسبه کنید.

↓ همگرالت.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx \rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi-x}{n}\cos nx\Big]_0^{\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big]_0^{\pi}\right)$$

$\pi-x$ + $\sin nx$

-1 − $-\frac{1}{n}\cos nx$

0 $-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

سری فوریه سینوسی

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n=\frac{\pi-1}{2}$$

$$\frac{\pi-1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n$$

اتحاد پارسوال: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

$$\int_{-l}^{l}(f(x))^2dx=a_0\int_{-l}^{l}f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx+b_n\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ اتحاد پارسوال

(۹) مثال. آیا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ یک سری فوریه تابع f است؟

$a_0 , b_n = 0$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ واگرا ($p=1$ یا سری هارمونیک)

بنا به اتحاد پارسوال طرف اول عدد می شود و طرف دوم بی نهایت ※ پس سری فوریه تابع نیست.

(۱۰) مثال. سری فوریه $f(x)=x^2$ ، $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بدست آورده و به کمک اتحاد پارسوال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید. ($p>1$ همگرا) $f(x)$ یک تابع زوج است پس b_n صفر می باشد.

$T=2l=2\pi \Rightarrow l=\pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$ (قبلاً محاسبه شده است)

طرف اول: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\pi}\right) = \frac{2\pi^4}{5}$ (۱) (زوج)

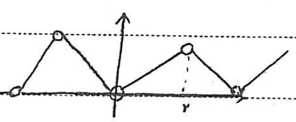
طرف دوم: $\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$ (۲)

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{18\pi^4-10\pi^4}{45} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(۱۱) تمرین: سری فوریه کسینوسی $f(x)=x$ ، $0<x<2$ را بدست آورده و به کمک اتحاد پارسوال $\frac{1}{n^4}$ را بدست آورید.



$\frac{\pi^4}{95}$

حل شود.

PAPCO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۲) سری فوریه توابع زیر را بنویسید:

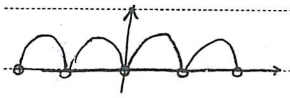
$f(x) = |x|$ زوج $\quad -\pi < x < \pi \qquad f(x+2\pi) = f(x)$

$f(x) = x - x^2$ نه زوج نه فرد " "

$f(x) = x^3$ فرد " "

$f(x) = \sin \pi x \qquad 0 < x < 1 \qquad f(x+1) = f(x)$

زوج



انتگرال فوریه

هرگاه $f(x)$ متناوب نباشد می‌توان آن را متناوب با دوره تناوب ∞ فرض کرد. $(l = \infty)$

در این صورت سری فوریه $f(x)$ به انتگرال فوریه تبدیل می‌شود. (توابع غیر متناوب به جای سری فوریه دارای انتگرال فوریه هستند.)

$$f(x) = \int_0^\infty \left(A(\omega)\cos \omega x + B(\omega)\sin \omega x\right) d\omega$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

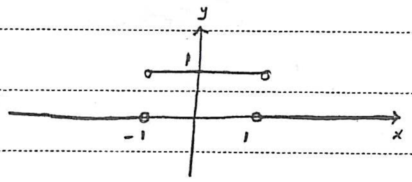
تعریف انتگرال

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos \omega x\,dx \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin \omega x\,dx$$

$\begin{cases} \text{زوج } f(x) \rightarrow B(\omega) = 0 \\ \text{فرد } f(x) \rightarrow A(\omega) = 0 \end{cases}$

۱۳) مثال انتگرال فوریه $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ را به دست آورده به کمک آن $\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega$ را بیابید

$-1 < x < 1$ ؛ به ازای x ها ؛ $x > 1$ ، $x < -1$



$f(x)$ زوج است، پس $B(\omega) = 0$ می‌شود.

نیاز به شکل نیست / بنا به دامنه متقارن آن

$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = 1 \\ f(-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos \omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos \omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)$$

زوج

تساوی در نقاط پیوستگی برقرار است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(٧)

$d(2w) = 2\,dw$

$[dw = u'dx]$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\, dw \xrightarrow{x=0} \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2} f(0) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه: $\int_0^\infty \frac{\sin w \cos 2w}{w} dw = \frac{\pi}{2} f(2) = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$x=1$ (نقطه ناپیوسته) $\rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin w \cos w}{w} dw = \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

یا $\int_0^\infty \frac{2\sin w \cos w}{2w} dw = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2w}{2w} d(2w) = \frac{\pi}{4}$

۱۴) حل تمرین (نکته)

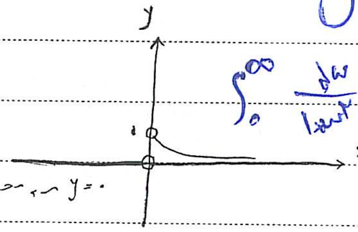
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \tan^{-1} s \Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

لاپلاس: $L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt = \frac{a}{s^2+a^2}$

۱۵) انتگرال فوریه $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$ را بدست آورید.

(نه زوج و نه فرد (نمایی))



$y=0$ مجانب محور x

$\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} \leftarrow x=0$

تعریف لاپلاس:

$L\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-sx}\cos ax\, dx = \frac{s}{s^2+a^2}$

$L\{\sin ax\} = \int_0^\infty e^{-sx}\sin ax\, dx = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$f(x) = \int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)\, dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos wx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+w^2}\right)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin wx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin wx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{w}{1+w^2}\right)$$

[illegible]

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+w^2}\cos wx + \frac{w}{1+w^2}\sin wx\right) dw$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w^2} dw = \pi f(x) \quad x=0 \rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+w^2} dw = \pi\left(\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

توسیع زوج

انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی:

$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw$ $\qquad$ $f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\, dw$

$f(x)$ $\quad x>0$

$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\, dx$ $\qquad$ $B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\, dx$

$f(x)$ انتگرال فوریه کسینوسی $\qquad$ $f(x)$ انتگرال فوریه سینوسی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۶) مثال. انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی $f(x)=e^{-kx}$ $(x>0 , k>0)$ را به دست آورده و به کمک آن

حاصل انتگرال های زیر را بیابید: $\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw$, $\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw$

شرط لازم برای وجود انتگرال فوریه: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

ابتدا انتگرال فوریه کسینوسی $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{k}{k^2+w^2}\right)$$

حقیقا:

$$e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k^2+w^2}\cos wx\,dw \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}$$

حال انتگرال فوریه سینوسی $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم

$$B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{w}{k^2+w^2}\right)$$

حقیقا:

$$e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w}{k^2+w^2}\sin wx\,dx \longrightarrow \int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$$

نکته: $\left(\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw\right)'=\left(\frac{\pi}{2k}e^{-kx}\right)'$ (از x) کنکوری

$$\int_0^\infty \frac{+w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2k}\left(+ke^{-kx}\right)$$

از یک فرمول می‌توان به فرمول دیگر رسید

$$\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

تعریف ۱: هر رابطه بین متغیر وابسته و متغیرهای مستقل و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

تعریف ۲ و ۳: چنانچه تنها یک متغیر مستقل داشته باشیم، معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل معمولی (O.D.E) می‌نامیم و چنانچه تعداد متغیرهای مستقل بیشتر از یکی باشد، معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی (P.D.E) می‌نامیم

تعریف ۴: مرتبهٔ بیشترین مشتق ظاهر شده در معادله را مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل گویند.

PAPCO

Subject: [$y=y(x)$ تابع ۱ متغیره و $u=u(x,y)$ تابع ۲ متغیره $w=w(x,y,z)$ تابع ۳ متغیره]
Year. Month. Date. ( )

تعریف ۵: یک معادله دیفرانسیل را خطی گوییم اگر نسبت به متغیر وابسته و مشتقاتش خطی باشد (درجه یا توان حداکثر برابر یک باشد)

تعریف ۶: یک معادله دیفرانسیل خطی را همگن گوییم هرگاه تمامی جملات شامل متغیر وابسته و مشتقاتش باشد (طرف ثانی معادله برابر صفر باشد).

تعریف ۷: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی مرتبه n رابطه‌ای است بین متغیر وابسته و متغیرهای مستقل شامل n تابع، با تعیین توابع دلخواه جواب‌های خصوصی معادله تعیین می‌شود.

مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل — متغیر وابسته — متغیر مستقل

مثال: $x^2\sin x\, y''' + 2xy'' + 3x^5y' + 2y = \cos x$

معادله دیفرانسیل ODE، مرتبه ۳، خطی، غیرهمگن

نکته: اگر تابع پیوسته و مشتقاتش هم پیوسته باشد، $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$ می‌شود.

مثال: $u(x,y) = x^5 + 4x^3y^4 + xy^5 + y^6 + 8x + 9y + 11$

۲ متغیر مستقل

معادله دیفرانسیل PDE

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 + 12x^2y^4 + y^5 + 8$ $\qquad u_{xx} = 20x^3 + 24xy^4$

$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 16x^3y^3 + 5xy^4 + 6y^5 + 9$ $\qquad u_{yy} = 48x^3y^2 + 20xy^3 + 30y^4$

$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = 48x^2y^3 + 5y^4$ $\qquad u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 48x^2y^3 + 5y^4$

$u=u(x,y)$ تابع دو متغیره

مثال: $x^3y^2\sin x\cos y\, u_{xxy} + 3xy\, u_{xy} + 4u_x + 8u_y - 4u = 0$

معادله دیف، PDE، مرتبه ۳، خطی، همگن

مثال: $u_{xyyy} + 4x^2u_{xy} + 3(u_y)^2 + 4u = 0$

معادله دیف، PDE، مرتبه ۴، غیرخطی

نکته: باید مشتقات u به توان نرسند و در هم ضرب نشوند و تابعی روی آن‌ها اثر نگذارد تا معادله خطی شود.

مثال: $u_{xy} + 4u_xu_y - 3u = 0$

معادله دیف، PDE، مرتبه ۲، غیرخطی

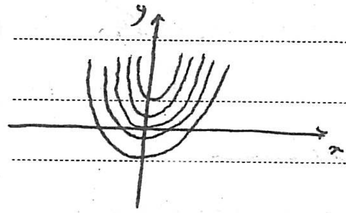
مثال: $u_{xxx} + 3u_{xy} - 4\sin(u_x) - 2u = 0$

معادله دیف، PDE، مرتبه ۳، غیرخطی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = x^2 + c$ یک دسته منحنی تک پارامتری — مشتق → $y' = 2x$

معادله دیفرانسیل ODE ، مرتبه یک



جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه یک ، یک دسته منحنی تک پارامتری است

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n ، یک دسته منحنی n پارامتری است.

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \xrightarrow{'} y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \xrightarrow{'} y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$

$y'' + y = 0$ ، معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ ← * دلیل: از جواب عمومی به معادله برگشتن را بلد باشیم.

$t^2 + 1 = 0$ → i , $-i$ — معادله مشخصه

$\begin{cases} p = 0 \\ q = 1 \end{cases}$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$u = u(x,y)$

$u_{xx} - 5u_x + 6u = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0 \to 2, 3$

$u(x,y) = F(y)e^{2x} + G(y)e^{3x}$

$u_{yy} - 6u_y + 9u = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$r_1 = r_2 = 3$, $u(x,y) = F(x)e^{3y} + G(x)\,y\,e^{3y}$

$u = u(x,y)$ تابع دو متغیره — $w = w(x,y,z)$ تابع سه متغیره

$u_x = 0 \Rightarrow u = F(y)$ — $w_y = 0 \to w = F(x,z)$

$u_y = 0 \Rightarrow u = F(x)$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه n ، n تابع می‌شود.

$u_{xx} = 0 \to u_x = F(y) \Rightarrow u = x F(y) + G(y)$

$u_{yy} = 0 \to u_y = F(x) \Rightarrow u = y F(x) + G(x)$

* در واقع اینجا به جای ثابت ، تابع داریم

$u_{xxx} = 0 \to u_{xx} = F(y) \Rightarrow u_x = x F(y) + G(y) \to u = x^2 F(y) + x G(y) + H(y)$

$u_{yyy} = 0 \to u_{yy} = F(x) \Rightarrow u_y = y F(x) + G(x) \Rightarrow u = y^2 F(x) + y G(x) + H(x)$

$u_{xy} = 0 \to u_x = F(x) \to u = \int F(x)\,dx + G(y) \Rightarrow u = M(x) + G(y)$

$u_{yx} = 0 \to u_y = F(y) \Rightarrow u = \int F(y)\,dy + G(x) \Rightarrow u = M(y) + G(x)$

مثال. $u_{xy} = x + y \xrightarrow{\int_y} u_x = xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \Rightarrow u = \underbrace{\frac{x^2}{2}y + x\frac{y^2}{2}}_{u_p} + \underbrace{F(x) + G(y)}_{u_h}$

$u_G = u_p + u_h$

18) $u_{xx} - 5u_x + 6u = 0$ (۵)

$r^2 - 5r + 6 = 0 \to 2,\ 3$ $\quad u(x,y) = F(y)e^{2x} + G(y)e^{3x}$

$u_{yy} - 6u_y + 5u = 0$

$r^2 - 6r + 5 = 0 \to 1,\ 5$ $\quad u(x,y) = F(x)e^{1y} + G(x)e^{5y}$

$u_{xx} - 6u_x + 9u = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0 \to r_1 = r_2 = 3$

$u(x,y) = F(y)e^{3x} + G(y)\,x e^{3x}$

$u_{yy} - 10u_y + 25u = 0$

$r^2 - 10r + 25 = 0 \to r_1 = r_2 = 5$

$u(x,y) = F(x)e^{5y} + G(x)\,y e^{5y}$

$u_{xx} - 2u_x + 5u = 0$

$r^2 - 2r + 5 = 0 \to 1+2i,\ 1-2i$

$u(x,y) = F(y)\,e^{x}\cos 2x + G(y)\,e^{x}\sin 2x$

$u_{xx} + a^2u = 0$ *

$r^2 + a^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ia$ $\quad \begin{cases} p = 0 \\ q = a \end{cases}$

$u = F(y)\cos ax + G(y)\sin ax$

$u_{yy} - 4u_y + 13u = 0$

$r^2 - 4r + 13 = 0 \to 2+3i,\ 2-3i$

$u(x,y) = F(x)e^{2y}\cos 3y + G(x)e^{2y}\sin 3y$

* $x^2u_{xx} - 5xu_x + 5u = 0$

$z = \ln x$ $\quad u_{zz} - 6u_z + 5u = 0$

$r^2 - 6r + 5 = 0 \to 1,\ 5$

$u = F(y)e^{z} + G(y)e^{5y} \to u = F(y)x^1 + G(y)x^5$

$y' + p(x)y = Q(x)$ معادله خطی مرتبه اول نسبت به y

یادآوری: $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + C\right)$

Subject: Year. Month. Date: ( )

۱۹) روش حل مرتبه: $u = u(x,y)$

$u_{xy} - 2u_x = x+y$

$u_x = h$

$h_y - 2h = x+y$

معادله خطی مرتبه اول نسبت به h

$$h = e^{\int 2dy}\left(\int e^{-\int 2dy}(x+y)\,dy + \varphi(x)\right)$$

$$h = e^{2y}\left(-\frac{1}{2}(x+y)e^{-2y} - \frac{1}{4}e^{-2y} + \varphi(x)\right)$$

روش جزء به جزء جدولی:

$x+y$ +	e^{-2y}
1 −	$-\frac{1}{2}e^{-2y}$
0	$\frac{1}{4}e^{-2y}$

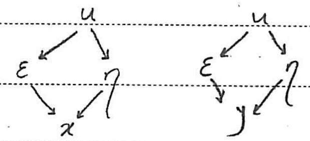
$$h = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + e^{2y}\varphi(x)$$

$$\int_x:\quad u = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}x + e^{2y}F(x) + G(y)$$

۲۰) $u = u(x,y)$ ، $u_x = u_y$ را حل کنید.

روش جدید: $u = F(x+y)$

$$\begin{cases}\xi = x+y\\ \eta = x-y\end{cases} \quad \begin{cases}u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}u_x = u_\xi + u_\eta\\ u_y = u_\xi - u_\eta\end{cases}$$



$u_x = u_y \rightarrow u_\xi + u_\eta = u_\xi - u_\eta$

$2u_\eta = 0 \rightarrow u_\eta = 0 \rightarrow u = F(\xi) \rightarrow u = F(x+y)$

معادلات هم بعد اویلر

$$a u_{xx} + 2h u_{xy} + b u_{yy} = 0$$

[a و b و h مقادیر ثابت]

مشخصه یا مبین یا مفسر معادله: $a + 2h\lambda + b\lambda^2 = 0$

۱) $\Delta > 0$ ، مبین دارای ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2:

$u(x,y) = F(x + \lambda_1 y) + G(x + \lambda_2 y)$

جواب عمومی

۲ مجانب:

(معادله از نوع هذلولوی)

۲) $\Delta = 0$ مبین دارای ریشه مضاعف: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$u(x,y) = F(x + \lambda y) + yG(x + \lambda y)$

جواب عمومی

۱ مجانب:

(معادله از نوع سهموی)

نکته مهم ۸

$\left(\int_{u(x)}^{U(x)} f(t)\, dt\right)' = U'(x) f(U(x)) - u'(x) f(u(x))$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۰)

۳) $\Delta < 0$ ، مبین دارای دو ریشهٔ مختلط مزدوج λ_1^* و λ_2^* .

$u(x,y) = F(x+\lambda_1^* y) + G(x+\lambda_2^* y)$

جواب عمومی

(معادله از نوع بیضوی)

---

۲۱) مثال . $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0$ (معادله از نوع هذلولوی.)

$3 - 4\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow 1,\ 3$ $u(x,y) = F(x+y) + G(x+3y)$ جواب عمومی

مثال . $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = 0$ (سهموی)

$9 - 6\lambda + \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$ $u(x,y) = F(x+3y) + y\,G(x+3y)$ جواب عمومی

مثال . $5u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ (بیضوی)

$5 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow 1+2i,\ 1-2i$ $u(x,y) = F(x+(1+2i)y) + G(x+(1-2i)y)$ جواب عمومی

مثال . $u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادله پتانسیل (بیضوی)

$1 + \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i$ $u(x,y) = F(x+iy) + G(x-iy)$ جواب عمومی

$= u(x,t)$ $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ معادلهٔ موج یک بعدی

$\div c^2$

حل $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$

$1 - \frac{1}{c^2}\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = c^2 \Rightarrow \lambda = \pm c$

$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ جواب عمومی (هذلولوی)

مثال . $u_{tt} = 25u_{xx} \rightarrow u(x,t) = F(x+5t) + G(x-5t)$ جواب عمومی

$c = 5$ (هذلولوی)

قضیه اساسی دیف :

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل معادله موج با شرایط اولیه (حل دالامبر معادله موج)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$ Z.c شرایط اولیه

سرعت اولیه ← (مشتق نسبت به زمان)

$$u(x,0) = f(x) \rightarrow F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(x,t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow cF'(x) - cG'(x) = g(x)$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c} g(x) \end{cases} \xrightarrow[\int]{\text{حورش}} \begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_a^x g(\varepsilon)\,d\varepsilon \end{cases}$$

$$* \left(\int_a^x g(\varepsilon)\,d\varepsilon\right)' = g(x)$$

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x g(\varepsilon)\,d\varepsilon \\ G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x g(\varepsilon)\,d\varepsilon \end{cases}$$ عوض کردن به جای x بگذار

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_a^{x+ct} g(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_a^{x-ct} g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$ جواب خصوصی

مثال $u_{tt} = 9u_{xx}$ $\quad c = 3$ (۲۲

استفاده از فرمول :

$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+3t)^2 + (x-3t)^2\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \frac{1}{1+\varepsilon^2}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+3t)^2 + (x-3t)^2\right) + \frac{1}{6}\left(\tan^{-1}(x+3t) - \tan^{-1}(x-3t)\right)$$

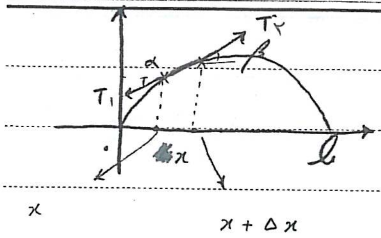
مسأله تار مرتعش :

تار کشسانی به طول L، چگالی ثابت ρ، تار صرفاً دارای نوسانات قائم است،
دو سر تار بسته است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اتحاد: معادله ای است که به ازای جمیع مقادیر x درست است.



$$T_2\cos\beta = T_1\cos\alpha = T$$

$$T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = \rho\,\Delta x\, u_{tt}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T}\Delta x\, u_{tt}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} = \frac{\rho}{T}\Delta x\, u_{tt}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt} \qquad \frac{\rho}{T} = \frac{1}{c^2}$$

$$u_{xx} = \frac{\rho}{T}u_{tt} \rightsquigarrow u_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

حل معادله موج با شرایط اولیه و شرایط مرزی

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ * $u \not\equiv 0$ ⊙

l

$0<x<l$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \quad \text{B.C شرایط مرزی}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \quad \text{I.C شرایط اولیه}$$

روش ضربی یا جداپذیری

اثبات لازم نیست

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

بررسی حالت:

$K=0 \Rightarrow \frac{X''}{X}=0 \to X''=0 \to X'=a \to X=ax+b$

$u_{tt} = XT''$, $u_{xx} = X''T$

$XT'' = c^2X''T$

$u(0,t)=0 \to X(0)T(t)=0$ ⟨ $X(0)=0$ ✓ ; $\forall t$ $T(t)=0 \to u\equiv 0$ ✗ ⊙

*
$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = K$$

لزوما منفی است

$u(l,t)=0 \to X(l)T(t)=0$ ⟨ $X(l)=0$ ✓ ; $\forall t$ $T(t)=0 \to u\equiv 0$ ✗ ⊙

تساوی همیشه برقرار است که این یعنی مقدار ثابتی است.

$X(0)=0 \to b=0$

$X(l)=0 \to al=0 \to a=0$

$\Rightarrow X\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$ ✗ ⊙

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$K>0 \quad , \quad K=\mu^2 \Rightarrow \frac{X''}{X}=\mu^2 \rightarrow X''-\mu^2 X=0$

$X = Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x} \qquad r^2-\mu^2=0 \Rightarrow r=\pm\mu$

$X(0)=0 \rightarrow A+B=0$

$X(l)=0 \rightarrow Ae^{\mu l}+Be^{-\mu l}=0 \Rightarrow A(\underbrace{e^{\mu l}-e^{-\mu l}}_{\neq 0\,?})=0 \Rightarrow A=0 \rightarrow B=0 \longrightarrow X\equiv 0 \rightarrow u\equiv 0$ ✗

$? \sim e^{\mu l}-e^{-\mu l}=0 \rightarrow e^{\mu l}=e^{-\mu l} \xrightarrow{Ln} 2\mu l=0 \begin{cases} l=0 & ✗ \\ \mu=0 & ✗ \end{cases}$

بنابراین K مثبت نیز نمی تواند باشد.

$K<0 \quad , \quad K=-p^2 \Rightarrow \frac{X''}{X}=-p^2 \rightarrow X''+p^2X=0$

$X = A\cos px + B\sin px \qquad r^2+p^2=0 \rightarrow r=\pm ip$

$X(0)=0 \rightarrow A=0$

$X(l)=0 \rightarrow B\sin pl=0 \Rightarrow \sin pl=0 \rightarrow pl=n\pi \rightarrow p=\frac{n\pi}{l}$

$X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,\ldots$

$\frac{T''}{c^2T}=-p^2 \Rightarrow T''+c^2p^2T=0 \Rightarrow T''+\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2T=0$

$r^2+\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2=0 \rightarrow r=\pm i\left(\frac{n\pi c}{l}\right)$

$T_n = A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t$

$n=1,2$

فرض کنید $u_1, u_2, \ldots$ جواب های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن باشند، هر ترکیب خطی آن ها نیز ($c_1u_1+c_2u_2+\ldots$) در معادله صدق می کند.

شرایط مرزی — در واقع $u_1, u_2, \ldots$ جوابهای معادله است.

$u_n(x,t) = X_nT_n = \left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$n=1,2,\ldots$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sin\frac{n\pi}{l}x$)

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)$

$u(x,0)=f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$

$* \; A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi c}{l}A_n\sin\frac{n\pi c}{l}t+\frac{n\pi c}{l}B_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$u_t(x,0)=g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=g(x)$

$\frac{n\pi c}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$* \; B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

مثال $u_{tt}=9u_{xx}$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}$ روش

$\begin{cases} l=\pi \\ c=3 \\ g(x)=0 \\ f(x)=\sin 5x \end{cases}$

$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=\sin 5x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 5x\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & n\neq 5\\ 1 & n=5\end{cases}$

$=\begin{cases}A_n=0 & n\neq 5\\ A_5=1 & n=5\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N} \rightarrow B_n=0$

چون $g(x)$ صفر می‌شود

$u(x,t)=\cos 15t\sin 5x$

معادله حرارت

$u_t=c^2u_{xx}$ $\quad \overset{l}{\longleftrightarrow}$ $\quad 0<x<l$

$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases}$ B.C

$u(x,0)=f(x)$ I.C

$u(x,t)=X(x)\,T(t)$

$u_t=XT' \;,\; u_{xx}=X''T$

$XT'=c^2X''T$

$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{c^2T}=-p^2$

PAPCO

بحث ماشین

Subject:
Year. Month. Date.

$$\frac{X''}{X} = -p^2 \Rightarrow X'' + p^2 X = 0$$

$$r^2 + p^2 = 0 \rightarrow r = \pm ip \qquad X = A\cos px + B\sin px$$

$u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$

$u(l,t) = 0 \rightarrow X(l) = 0$

$X(0) = 0 \rightarrow A = 0$

$X(l) = 0 \rightarrow \sin pl = 0 \rightarrow pl = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{l}$

$$X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1,2,\dots$$

$$\frac{T'}{c^2T} = -p^2 \rightarrow T' + c^2p^2T = 0 \rightarrow T' + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T = 0$$

$$T_n = E_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \qquad n = 1,2,\dots$$

$$u_n(x,t) = E_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1,2,\dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

[illegible]

$$u_t = 4u_{xx} \qquad \{ l = 3,\ c = 2,\ f(x) = 10\sin 2\pi x - 4\sin 4\pi x$$

$0 < x < 3$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = 10\sin 2\pi x - 4\sin 4\pi x \end{cases}$$

$$E_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (10\sin 2\pi x - 4\sin 4\pi x)\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx \overset{①,②}{=} \begin{cases} 0 & n \neq 6, 12 \\ 10 & n = 6 \\ -4 & n = 12 \end{cases}$$

① $\frac{2}{3}\int_0^3 10\sin 2\pi x \sin\frac{n\pi}{3}x\,dx = \frac{2}{3}\times\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} 10\sin 6u \sin nu\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 10\sin 6u\sin nu\,du$

$\frac{\pi}{3}x = u \rightarrow \pi x = 3u \rightarrow \pi\,dx = 3\,du \rightarrow dx = \frac{3}{\pi}du \qquad = \begin{cases} 0 & n \neq 6 \\ 10 & n = 6 \end{cases}$

② $\frac{2}{3}\int_0^3 4\sin 4\pi x \sin\frac{n\pi}{3}x\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq 12 \\ 4 & n = 12 \end{cases} \qquad \left[\int_{-\pi}^{\pi} \rightarrow \pi \quad \int_0^{\pi} \rightarrow \frac{\pi}{2}\right]$

Subject:
Year. Month. Date.

(۱۳)

$u(x,t) = 10 e^{-16\pi^2 t}\sin 2\pi x - 6 e^{-64\pi^2 t}\sin 4\pi x$

همگن‌سازی معادلات ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(l,t) = q(t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

نکته: چنانچه طرف ثانی مستقل از زمان باشد ($F(x,t) = h(x)$) و توابع $p(t)$ و $q(t)$ ثابت باشند ($p(t) = A$, $q(t) = B$)، در این صورت با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ و سپس به دست آوردن ψ، می‌توان معادله را به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن برحسب v تبدیل کرد.

مثال: $u_{tt} - u_{xx} = 6x$ *

$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ *

$$\begin{cases} u(0,t) = 1 \\ u(1,t) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = x+1 \end{cases}$$

$u_{tt} = v_{tt} \quad , \quad u_{xx} = v_{xx} + \psi''(x)$

$\xrightarrow{*} v_{tt} - v_{xx} - \psi''(x) = 6x \rightarrow \psi''(x) = -6x \rightarrow \psi'(x) = -3x^2 + m \Rightarrow$

$\psi(x) = -x^3 + mx + n$

$u(0,t) = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{v(0,t)}_{0} + \psi(0) \Rightarrow \psi(0) = 1 \Rightarrow n = 1$

$u(1,t) = 2 \Rightarrow 2 = \underbrace{v(1,t)}_{0} + \psi(1) \Rightarrow \psi(1) = 2 \Rightarrow -1 + m + 1 = 2 \rightarrow m = 2$

$\psi(x) = -x^3 + 2x + 1$

$u(x,0) = v(x,0) + \psi(x) \rightarrow x^2 = v(x,0) - x^3 + 2x + 1$

$v(x,0) = x^3 + x^2 - 2x - 1$

بنابراین $u_t = v_t \rightarrow u_t(x,0) = v_t(x,0)$

$v_{tt} - v_{xx} = 0$

$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ v_t(x,0) = x + 1 \end{cases}$$

maple | Matlab

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۸۴ ۸۵ ۸۶ 9 fourier(e^{-x}, x, w)

$u_t - u_{xx} = x$ ۱، ۲، ۳، ۴

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = \frac{5}{4} \\ u(x,0) = \frac{-x^3}{4} \end{cases}$$

$u_t = v_t$, $u_{xx} = v_{xx} + \varphi''(x)$

$v_t - v_{xx} - \varphi''(x) = x \rightarrow \varphi''(x) = -x \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \varphi(x) = \frac{-x^3}{4} + mx + n$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow 0 = v(0,t) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow n = 0$

$u(1,t) = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{5}{4} = v(1,t) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = \frac{5}{4} \Rightarrow m = 1$

$\varphi(x) = \frac{-x^3}{4} + x$

$u(x,0) = v(x,0) + \varphi(x) \rightsquigarrow \frac{-x^3}{4} = v(x,0) - \frac{x^3}{4} + x \rightarrow v(x,0) = -x$

$v_t - v_{xx} = 0$

$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -x \end{cases}$$

جزء به جزء جدولی

$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \rightarrow E_n = -2\int_0^1 x \sin n\pi x\,dx$

$= -2\left(\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big]_0^1\right) = \frac{2}{n\pi}(-1)^n$

x	+	$\sin n\pi x$
1	−	$-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$
0		$-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x - \frac{x^3}{4} + x$$

تبدیلات فوریه

تبدیل فوریه کسینوسی

$$F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx = \hat{f}_c(w)$$

$$F_c^{-1}\{\hat{f}_c(w)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}_c(w)\cos wx\,dw = f(x)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال

$$F_c\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}\cos wx\,dx}_{L\{\cos wx\}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+w^2}\right)$$

$$F_c^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+w^2}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}\cos wx\,dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw \overset{\text{فرمول}}{=} e^{-x}$$

$$F_c\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}e^{-w}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-w}$$

$$F_c^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-w}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-w}\cos wx\,dw = \frac{1}{1+x^2}$$

فرمول یادآوری: $\int_0^\infty \frac{\cos wx}{K^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2K}e^{-Kx}$

تبدیل فوریه سینوسی

$$F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx = \hat{f}_s(w)$$

$$F_s^{-1}\{\hat{f}_s(w)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin wx\,dw = f(x)$$

فرمول یادآوری: $\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{K^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-Kx}$

مثال

$$F_s\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}\sin wx\,dx}_{L\{\sin wx\}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{1+w^2}\right)$$

$$F_s^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{1+w^2}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}\sin wx\,dw = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) = e^{-x}$$

مثال

$$F_s\left\{\frac{x}{1+x^2}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\sin wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}e^{-w}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-w}$$

تبدیل فوریه کلی

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{-iwx}\,dx = \hat{f}(w)$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(w)\,e^{iwx}\,dw = f(x)$$

PAPCO

$* \; ax^2+bx+c = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: $F\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+i\omega x)}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x+\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x+\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2}dx$

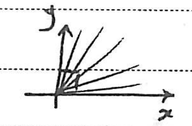
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt}_{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

$* \; \sqrt{a}\,x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} = t$

$\sqrt{a}\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$

روش حل:

$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$



$I = \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$

$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^{\infty}\right) = \frac{\pi}{4}$

$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

تبدیل فوریه مشتقات توابع:

با فرض اینکه $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ و $f(x)$ تبدیل فوریه دارد.

$F_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\cos\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(f(x)\cos\omega x\Big]_0^{\infty} + \omega\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx\right)$

$\begin{cases}\cos\omega x = u \\ f'(x)\,dx = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\omega\sin\omega x\,dx = du \\ f(x) = v\end{cases}$

$= \omega\underbrace{\hat{f}_s(\omega)}_{F_s\{f(x)\}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

$F_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\sin\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(f(x)\sin\omega x\Big]_0^{\infty} - \omega\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\right)$

جزء به جزء مثل بالا

$= -\omega F_c\{f(x)\}$

$F_c\{f''(x)\} = -\omega^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$

$F_s\{f''(x)\} = -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین: دو رابطه روبرو را نشان دهید

$F\{f'(x)\} = i\omega F\{f(x)\}$

$F\{f''(x)\} = -\omega^2 F\{f(x)\}$

$F_c\{u(x,t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x,t) \cos\omega x \, dx = \hat{u}_c(\omega,t)$

$F_c\{u_x\} = \omega \hat{u}_s(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u(0,t)$

$F_c\{u_{xx}\} = -\omega^2 \hat{u}_c(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_x(0,t)$

$F_c\{u_t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_t \cos\omega x \, dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u \cos\omega x \, dx\right) = \frac{\partial \hat{u}_c}{\partial t}$

$F_c\{u_{tt}\} = \frac{\partial^2 \hat{u}_c}{\partial t^2}$

$F_s\{u(x,t)\} = \hat{u}_s(\omega,t)$

$F_s\{u_x\} = -\omega \hat{u}_c(\omega,t)$

$F_s\{u_{xx}\} = -\omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega u(0,t)$

$F_s\{u_t\} = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t}$

$F_s\{u_{tt}\} = \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial t^2}$

$F\{u(x,t)\} = \hat{u}(\omega,t)$

$F\{u_x\} = i\omega \hat{u}(\omega,t)$

$F\{u_{xx}\} = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$

$F\{u_t\} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$

$F\{u_{tt}\} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}$

PAPCO

تبدیل فوریه نمایی ← $-\infty<x<\infty$

تبدیل فوریه کسینوسی ← شرط مرزی نویمن ← نیمه متناهی
$u_x(0,t)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تبدیل فوریه سینوسی ← شرط مرزی دیریکله ← نیمه متناهی
$u(0,t)$

$$u_t=c^2u_{xx} \qquad 0<x<\infty$$

$$\begin{cases} u(0,t)=a \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

نیمه متناهی در x

$$\xrightarrow{F_s} \hat{u}_s(w,0)=0$$

$$F_s\{u_t\}=F_s\{c^2u_{xx}\}$$

$$\frac{d\hat{u}_s}{dt}=c^2\left(-w^2\hat{u}_s(w,t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,w\,u(0,t)\right) \quad (u(0,t)=a)$$

$$\frac{d\hat{u}_s}{dt}+c^2w^2\hat{u}_s=c^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,wa$$

معادله خطی مرتبه اول نسبت به $\hat{u}_s$

$$\hat{u}_s(w,t)=e^{-c^2w^2t}\left(\int e^{c^2w^2t}\left(c^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,aw\right)dt+A(w)\right)$$

$$=e^{-c^2w^2t}\left(\frac{1}{c^2w^2}e^{c^2w^2t}\left(c^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,aw\right)+A(w)\right)$$

$$\hat{u}_s(w,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w}+e^{-c^2w^2t}A(w)$$

$$\hat{u}_s(w,0)=0\rightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w}+A(w)=0\rightarrow A(w)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w}$$

$$\hat{u}_s(w,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w}\left(1-e^{-c^2w^2t}\right)$$

$$u(x,t)=F_s^{-1}\{\hat{u}_s(w,t)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w}\left(1-e^{-c^2w^2t}\right)\sin wx\,dw$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad 0<x<\infty\ ,\ 0<y<\infty$$

(نیمه متناهی) — تبدیل فوریه کسینوسی

* y به جای t نشسته است.

$$\begin{cases} u_x(0,y)=0 \\ u(x,0)=e^{-x} \\ |u(x,y)|<M \end{cases}$$

$$F_c\{u_{xx}\}+F_c\{u_{yy}\}=0$$

$$-w^2\hat{u}_c(w,y)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u_x(0,y)+\frac{d^2\hat{u}_c}{dy^2}=0$$

$$\frac{d^2\hat{u}_c}{dy^2}-w^2\hat{u}_c=0$$

$$r^2-w^2=0\rightarrow r=\pm w$$

PAPCO

تمرین : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \end{cases} \qquad -\infty < x < +\infty$$

(۱۶) تمرین :

Subject:

Year. Month. Date:

$\hat{u}_c(\omega, y) = A(\omega) e^{-\omega y} + B(\omega) e^{\omega y}$

$|u(x,y)| < M \Rightarrow B(\omega) = 0$

$\hat{u}_c(\omega, y) = A(\omega) e^{-\omega y}$

$u(x,0) = e^{-x} \xrightarrow{F_c} \hat{u}_c(\omega, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right)$

$\hat{u}_c(\omega, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right) \rightsquigarrow A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right)$

$\hat{u}_c(\omega, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right) e^{-\omega y}$

$u(x,y) = F_c^{-1}\{\hat{u}_c(\omega, y)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right) e^{-\omega y} \cos \omega x \, d\omega$

توابع مختلط

$\mathbb{C} = \{ x + iy \,;\, x \in \mathbb{R} ,\, y \in \mathbb{R} \}$

$\xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$a + ib \longrightarrow (a,b) \longrightarrow a\vec{i} + b\vec{j}$

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ تابع مختلط با متغیر مختلط

انواع توابع مختلط

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ تابع مختلط با متغیر حقیقی

$i = \sqrt{-1} \rightsquigarrow i^2 = -1$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

* اندازه دو عدد مختلط را می‌توان باهم مقایسه کرد نه خود دو عدد را ...

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} f(z) \\ v = \operatorname{Im} f(z) \end{cases}$$

u و v توابع دو متغیره حقیقی‌اند ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال. $z = x+iy$ و $\bar{z} = x-iy$

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$ $\quad * \; i \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} u(x,y) = x^2-y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$ $\quad f(i) = i^2 = -1$

$f(i) = -1$

اگر تابع مشتق‌پذیر نباشد $\begin{cases} x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \dfrac{z-\bar{z}}{2} \end{cases}$

اگر تابع مشتق‌پذیر باشد به جای $\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ می‌گذاریم.

مثال. $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} \times \dfrac{(x-iy)}{(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

اشتباه

$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

تمرین. $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $f(z) = z^3$ $\quad u, v$ ؟

$= x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$ $\quad \begin{cases} u = x^3-3xy^2 \\ v = 3x^2y-y^3 \end{cases}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ $F(t) = u(t) + i\,v(t)$

u و v توابع یک متغیرهٔ حقیقی‌اند ؛ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ؛

مثال. $F(t) = t^2 + it^3$ $\quad \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$

$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = t^3 \end{cases}$ $\quad F(1) = 1+i$, $\quad F(2) = 4+8i$, $\quad F(\cancel{x})$

مثال. $F(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$ $\quad \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$

$\begin{cases} u(t) = \cos t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$ $\quad u, v$ ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حد یک تابع مختلط:

گوییم $f(z)$ در z_0 دارای حد l است و می‌نویسیم:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

هرگاه

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; ; \; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{z \to 1} \frac{iz}{3} = \frac{i}{3}$$

$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \; ; \; 0 < |z - 1| < \delta \Rightarrow$

$\left|\frac{iz}{3} - \frac{i}{3}\right| = \left|\frac{i}{3}(z-1)\right| = \left|\frac{i}{3}\right| |z-1| = \frac{|z-1|}{3} < \varepsilon$

$|z-1| < 3\varepsilon$

$\delta < 3\varepsilon$

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید: $\lim_{z \to 3i} z^2 = -9$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \, , \, 0 < |z - 3i| < \delta$

$|z^2 + 9| < \varepsilon \rightarrow |z - 3i||z + 3i| < \varepsilon \rightarrow |z - 3i| < \frac{\varepsilon}{|z+3i|}$ $\quad \delta < \frac{\varepsilon}{|z+3i|}$

گوییم $f(z)$ در $z = z_0$ پیوسته است هرگاه

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \; ; \; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta$

مشتق یک تابع مختلط:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Subject: تمرین : $f'(z) = nz^{n-1}$

Year. Month. Date. ( )

مثال $f(z)=z^2$ در کجا مشتق پذیر است و در صورت وجود $f'(z)$ را محاسبه کنید.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+(\Delta z)^2+2z(\Delta z)-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\Delta z+2z)=2z$$

$f(z)=z^2$ همه جا مشتق پذیر است (تام) و $f'(z)=2z$

نکته: به طور کلی $(n\in\mathbb{N})$ $f(z)=z^n$ همه جا مشتق پذیر است (تام)

مثال $f(z)=\bar z$ کجاها مشتق پذیر است؟

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\bar z+\overline{\Delta z}-\bar z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1 & \Delta y=0,\ \Delta x\to 0\\ -1 & \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

مسیرهای گوناگون

$f(z)=\bar z$ هیچ جا مشتق پذیر نیست.

مثال $f(z)=\operatorname{Re} z$ کجا مشتق پذیر است؟ $z=x+iy$ و $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re} z}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+i\Delta y}=\lim\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1 & \Delta y=0,\ \Delta x\to 0\\ 0 & \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

$f(z)=\operatorname{Re} z$ هیچ جا مشتق پذیر نیست

نکته: $z\bar z=|z|^2$

مثال $f(z)=|z|^2$ کجا مشتق پذیر است؟

$f(z)=|z|^2=z\bar z$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overbrace{(\overline{z+\Delta z})}^{\bar z+\overline{\Delta z}}-z\bar z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\bar z+z\overline{\Delta z}+\Delta z\bar z+(\Delta z)(\overline{\Delta z})}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar z+\overline{\Delta z}\right)=\begin{cases}0 & z=0\\ z\neq 0: & \begin{cases}z+\bar z & \Delta y=0,\ \Delta x\to 0\\ -z+\bar z\end{cases}\end{cases}$$

$f(z)=|z|^2$ تنها در $z=0$ مشتق پذیر است.

PAPCO

Subject: $* \ Re z = x \qquad Im z = y$
Year. Month. Date. ( )

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

معادلات کوشی - ریمان (شرایط لازم برای مشتق پذیری)

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + i v(x,y))}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i(v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y))}{\Delta x + i\Delta y} \begin{cases} \Delta y = 0,\ \Delta x \to 0 & u_x + i v_x \\ \Delta x = 0,\ \Delta y \to 0 & -i u_y + v_y \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = u_x \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = v_x$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} = \frac{1}{i} u_y = -i u_y$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

شرایط لازم برای مشتق پذیری

معادلات کوشی - ریمان

نکته: در صورت مشتق پذیری $f(z)$ داریم:

$$f'(z) = \begin{cases} u_x + i v_x \\ v_y - i u_y \\ u_x - i u_y \\ v_y + i v_x \end{cases}$$

مشتق پذیری $f(z) = \bar{z}$ را با معادلات کوشی-ریمان بررسی کنید.

$f(z) = \bar{z} = x - iy$

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{matrix}$$

$u_x = v_y \Rightarrow 1 \neq -1$ امکان ندارد

$f(z) = \bar{z}$ هیچ جا مشتق پذیر نیست.

$f(z) = Im z$

$f(z) = Im z = y$

$$\begin{cases} u = y \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

$u_x = v_y \rightarrow 0 = 0$ همواره برقرار است

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ u_y = 1 \end{cases}$$

$v_x = -u_y \rightarrow 0 = -1$ امکان ندارد.

$\rightarrow$ $f(z) = Im z$ هیچ جا مشتق پذیر نیست

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مشتق پذیری

$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ ، مشتق پذیری $f(z)$ را در $z=0$ بررسی کنید.

$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{(\overline{\Delta z})^2}{\Delta z} - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)^2 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right)^2$

$\Delta y = 0,\ \Delta x \to 0$: $= 1$

$\Delta x = 0,\ \Delta y \to 0$: $= 1$

$\Delta x = \Delta y$: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

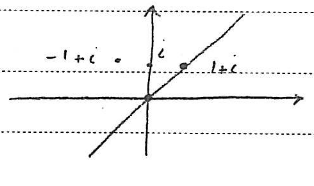
$f(z)$ در $z=0$ مشتق پذیر نیست اما در $z=0$ معادلات کوشی - ریمان برقرار است.

قضیه: هرگاه $f(z) = u + iv$ و u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشند (u ، v ، u_x ، u_y ، v_x ، v_y همگی پیوسته باشند) و در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند در این صورت $f(z)$ مشتق پذیر است.

(در حالت پیوستگی u و v و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها، معادلات کوشی - ریمان برای مشتق پذیری شرط کافی نیز هست) ...

مثال: $f(z) = x^2 + iy^2$ کجا مشتق پذیر است، در صورت وجود $f'(0)$ ، $f'(i)$ ، $f'(1+i)$ و $f'(-1+i)$ را محاسبه کنید.

$\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2y \end{cases}$ $\quad u_x = v_y \Rightarrow x = y$



$\begin{cases} v_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}$ $\quad v_x = -u_y \Rightarrow 0 = 0$ همواره برقرار است.

در این مثال به واسطه پیوستگی u ، v و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها، $f(z)$ روی $x = y$ مشتق پذیر است.

$f'(z) = u_x + iv_x$

$f'(z) = 2x$

$f'(0) = 0$

* $f'(1+i) = 2$

تنها $f'(0)$ و $f'(1+i)$ موجود هستند.
اون دوتای دیگر موجود نیستند.

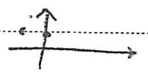
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(z) = x^3 - i(y-1)^3$ کجاها مشتق‌پذیر است؟ در صورت وجود $f'(0)$، $f'(i)$، $f'(2i)$ و $f'(1)$ را بیابید.

$$\begin{cases} u = x^3 \\ v = -(y-1)^3 \end{cases} \to \begin{cases} u_x = 3x^2 \\ v_y = -3(y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \to x^2 = -(y-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \to z = i$$

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \to v_x = -u_y \Rightarrow 0 = 0$$ همواره برقرار است.



تنها $f'(i)$ موجود است.

$f'(z) = u_x + i v_x = 3x^2$

$f'(i) = 0$

تابع هارمونیک یا همساز (توافقی)

تابع $h(x,y)$ را هارمونیک گوییم هرگاه پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ دوم بوده و در معادلهٔ لاپلاس دوبعدی صدق کند یعنی ($h_{xx} + h_{yy} = 0$)

لاپلاسین: $\nabla^2 h = h_{xx} + h_{yy}$ ← معادلهٔ لاپلاس: $\nabla^2 h = 0$

مثال. $u(x,y) = x^2 - y^2$ همساز است یا نه؟

$u_x = 2x \qquad u_y = -2y$

$u_{xx} = 2 \qquad u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ ✓

* چند جمله‌ای‌ها همواره پیوسته‌اند. و اعداد ثابت.

مثال: در صورتی که u همساز باشد (که یک تابع دو متغیره) $\nabla^4(xu)$ کدام است؟ (راهنمایی $\nabla^4(xu) = \nabla^2(\nabla^2(xu))$)

$$\nabla^2(xu) = (xu)_{xx} + (xu)_{yy} = (u + xu_x)_x + (xu_y)_y$$

$$= u_x + u_x + xu_{xx} + xu_{yy}$$

$$= 2u_x + x(u_{xx} + u_{yy})$$ (که برابر 0 است)

$$= 2u_x$$

PAPCO

$\nabla^4(xu) = \nabla^2(2u_x)$

$= 2\nabla^2(u_x)$

$= 2(u_{xxx}+u_{xyy})$ — مشتق جزئی مرتبه سوم را هم پیوسته می‌گیریم

$= 2(u_{xxx}+u_{yyx})$

$= 2(u_{xx}+u_{yy})_x$

$= 0$

$v(x,y)=2xy$ همساز است یا نه؟

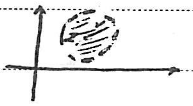
$v_x = 2y \qquad v_y = 2x$

$v_{xx} = 0 \qquad v_{yy} = 0$

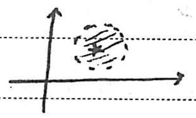
$v_{xx}+v_{yy} = 0+0 = 0$ ✓

همسایگی: یک همسایگی به مرکز z_0 و شعاع r را با $N_r(z_0)$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$N_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$



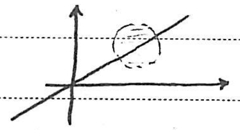
تابع تحلیلی: تابع $f(z)$ را در $z=z_0$ تحلیلی گوییم هرگاه در تمام نقاط یک همسایگی z_0 مشتق‌پذیر باشد.



مثال. $f(z)=x^2-y^2+i2xy$

کجا مشتق‌پذیر و کجا تحلیلی است؟

مثال مهم: $f(z)=x^2+iy^2$

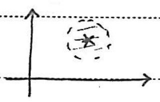


هیچ جا تحلیلی نیست

$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \to \begin{cases} u_x=2x \\ v_y=2x \end{cases} \to u_x=v_y \Rightarrow x=x$ ✓ همواره برقرار است

$\begin{cases} v_x=2y \\ u_y=-2y \end{cases} \to v_x=-u_y \Rightarrow y=y$ همواره برقرار است

* $2xy$ مزدوج همساز x^2-y^2 است



$f(z)$ همه جا مشتق‌پذیر و همه جا تحلیلی است.

هرگاه $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، u و v همسازند

(قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی همسازند)

در این حالت v را مزدوج همساز u می‌گیریم. (دقت شود که رابطهٔ مزدوج همساز بودن یک رابطه تقارنی نیست.)

اگر v مزدوج همساز u باشد لزوماً u مزدوج همساز v نیست

در واقع $-u$ مزدوج همساز v است

$\begin{cases} u_x=v_y \\ v_x=-u_y \end{cases} \leadsto \begin{matrix} u_{xx}=v_{yx} \\ -u_{yy}=v_{xy} \end{matrix} \leadsto u_{xx}+u_{yy}=0$ u همساز است

به همین ترتیب v هم همساز است.

PAPCO

مثال. $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

$\begin{cases} u = 2xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u_x = 2y \\ v_y = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = 2x \\ u_y = 2x \end{cases}$

$x^2 - y^2$ مزدوج همساز $2xy$ نیست.

اما $-(x^2 - y^2)$ مزدوج همساز $2xy$ است.

چنانچه قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی معلوم باشد، به کمک معادلات کوشی-ریمان قسمت موهومی آن تابع تحلیلی را با اختلاف مقدار ثابت می‌توان تعیین کرد (و برعکس)

مثال. نشان دهید $u = 2x(1-y)$ همساز است سپس مزدوج همساز آن را بیابید.

$u = 2x - 2xy$

$\begin{cases} u_x = 2 - 2y \quad u_y = -2x \\ u_{xx} = 0 \quad u_{yy} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$ همساز ✓

$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow v_y = 2 - 2y \Rightarrow v = 2y - y^2 + \varphi(x) \Downarrow v_x = \varphi'(x) \\ v_x = -u_y \Rightarrow v_x = 2x \end{cases}$

$\varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + c \qquad v = 2y - y^2 + x^2 + c$

مثال. اولاً مقدار a را چنان بیابید $u = ax^2y - y^3 + xy$ قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی مانند $f(z)$ بوده، سپس با تعیین ضابطه $f(z)$ مقدار $f'(i)$ را محاسبه کنید.

$\begin{cases} u_x = 2axy + y, \quad u_y = ax^2 - 3y^2 + x \\ u_{xx} = 2ay \quad u_{yy} = -6y \end{cases} \qquad u = 3x^2y - y^3 + xy$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightsquigarrow 2ay - 6y = 0 \rightsquigarrow a = 3$

$\begin{cases} u_x = v_y \rightsquigarrow v_y = 6xy + y \Rightarrow v = 3xy^2 + \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \rightsquigarrow v_x = 3y^2 + \varphi'(x) \\ v_x = -u_y \rightsquigarrow v_x = -3x^2 + 3y^2 - x \end{cases}$

$\varphi'(x) = -3x^2 - x \quad \varphi(x) = -x^3 - \frac{x^2}{2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(z) = 3x^2y - y^3 + xy + i(3xy^2 + \frac{y^2}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} + c)$

$i \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$f'(z) = u_x + i v_x = 6xy + y + i(3y^2 - 3x^2 - x)$

$f'(i) = 1 + 3i$

انتگرال مختلط:

انتگرال یک تابع مختلط با متغیر حقیقی.

$F(t) = u(t) + i\,v(t) \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

مثال. $F(t) = \underbrace{t^2}_{u(t)} + i\,\underbrace{t^3}_{v(t)} \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$

$$\int_0^2 F(t)\,dt = \int_0^2 t^2\,dt + i\int_0^2 t^3\,dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^2 + i\,\frac{t^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{8}{3} + 4i$$

خواص انتگرال یک تابع مختلط با متغیر حقیقی

1) $\int_a^b (F(t) \pm G(t))\,dt = \int_a^b F(t)\,dt \pm \int_a^b G(t)\,dt$

2) $\int_a^b \gamma F(t)\,dt = \gamma\int_a^b F(t)\,dt$

3) $\int_a^b F(t)\,dt = -\int_b^a F(t)\,dt \qquad \left(\int_a^a F(t)\,dt = 0\right)$

4) $\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^c F(t)\,dt + \int_c^b F(t)\,dt$

5) $\int_a^b \operatorname{Re} F(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_a^b F(t)\,dt \quad , \quad \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\,dt = \operatorname{Im}\int_a^b F(t)\,dt$

6) $\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,dt \qquad a \leq t \leq b$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال یک تابع مختلط با متغیر مختلط :

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,(x'(t)+i\,y'(t))\,dt$$

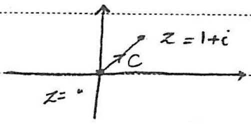
فرض کنیم معادله پارامتری خم C به صورت زیر باشد :

$C: \ z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad a \le t \le b$

$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$

$dz = z'(t)\,dt \Rightarrow dz = (x'(t)+i\,y'(t))\,dt$

مثال . $\int_C z^2 dz$ را بیابید که در آن خم C پاره خطی است که نقطه $z=0$ را به نقطه $z=1+i$ وصل می‌کند (* تحلیلی)



$(0,0),(1,1)$

$y = x$

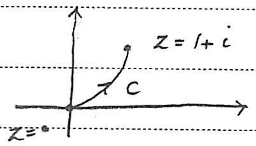
$C \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

$* \ $ با تابع اولیه $\displaystyle\int_{z=0}^{z=1+i} z^2 dz = \frac{(1+i)^3}{3}$

$C: \ z(t) = t + it \quad 0 \le t \le 1 \qquad z'(t) = 1 + i$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t+it)^2 (1+i)\,dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}$$

مثال . $\int_C z^2 dz$ را بیابید که در آن خم C قسمتی از سهمی $y = x^2$ است که (* تحلیلی)



$(0,0),(1,1)$ نقطه $z=0$ را به نقطه $z=1+i$ وصل می‌کند

$y = x^2$

$C \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad z(t) = t + it^2 \quad 0 \le t \le 1 \qquad z'(t) = 1 + 2it$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t+it^2)^2 (1+2it)\,dt = \frac{(1+i)^3}{3} \qquad * \int_{z=0}^{z=1+i} z^2 dz = \frac{(1+i)^3}{3}$$

ز تابع اولیه

$$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ \sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos iz = \cosh z \\ \cosh iz = \cos z \\ \sin iz = i \sinh z \end{cases} \qquad \sinh iz = i \sin z$$

Subject: Year. Month. Date. ( )

* اگر تابع تحلیلی باشد، انتگرال آن به مسیر بستگی ندارد (فقط به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد.)

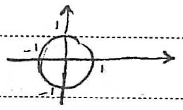
قضیه اصلی: هرگاه $f(z)$ روی ناحیه D تحلیلی باشد و $F(z)$ چنان باشد که $F'(z) = f(z)$ به ازای هر خم مانند C متعلق به D؛ نقاط ابتدایی و انتهایی به ترتیب z_1 و z_2 داریم

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

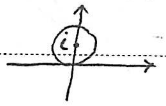
نتیجه: اگر $f(z)$ روی ناحیه D تحلیلی باشد و C یک خم بسته باشد، جواب انتگرال صفر می‌شود.

تحلیلی

$$\oint_{|z|=1} z^2\,dz = 0$$



$$\oint_{|z-i|=1} e^z\,dz = 0$$



$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \rightsquigarrow u_x = v_y$$

$$\begin{cases} v_x = e^x \sin y \\ u_y = -e^x \sin y \end{cases} \rightsquigarrow v_x = -u_y$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

$f(z) = e^z$ تام است یعنی تحلیلی می‌باشد

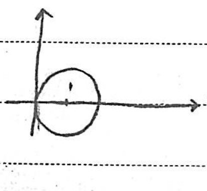
جواب‌های معادله $e^z = i$ را بیابید.

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 \rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \\ e^x \sin y = 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$\sin y \geq 0 \Rightarrow$ زوج k

$$z = x + iy \Rightarrow z = i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

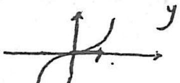
$$\oint_{|z-1|=1} \sin z\,dz = 0$$



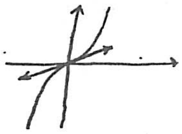
$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \rightsquigarrow u_x = \cos x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \rightsquigarrow v_y = \cos x \cosh y \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y$$

PAPCO



$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\begin{cases} v_x = -\sin x \sinh y \\ u_y = \sin x \sinh y \end{cases} \Rightarrow v_x = -u_y$ تام بس تحلیلی است.

$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x (1+\sinh^2 y) + (1-\sin^2 x)\sinh^2 y$
$= \sin^2 x + \sinh^2 y$ پس کران دار نیست زیرا
$0 \leq \quad \leq 1 \quad 0 \leq \quad \leq \infty$

$\sin x$ کران دار است ولی $\sin z$ کراندار نیست

★ جواب معادله $\sin z = 0$ را بیابید.

$\sin z = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = K\pi \quad K \in \mathbb{Z} \\ \cos x \sinh y = 0 \xrightarrow{x = K\pi} (-1)^K \sinh y = 0 \Rightarrow \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

$z = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$

$* \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

سؤال امتحان: جواب معادله $\sin z = 2i$ را بیابید.

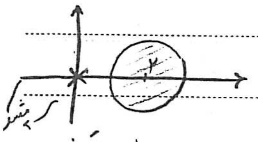
$\sin z = 2i \rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = K\pi \quad K \in \mathbb{Z} \\ \cos x \sinh y = 2 \xrightarrow{x = K\pi} (-1)^K \sinh y = 2 \Rightarrow \sinh y = 2(-1)^K \rightarrow y = \sinh^{-1}(2(-1)^K) \end{cases}$

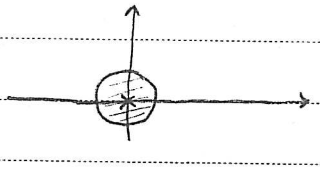
$z = K\pi + i \sinh^{-1}(2(-1)^K) \rightarrow z = K\pi + i \ln(2(-1)^K + \sqrt{5})$

$\oint_{|z-2|=1} \frac{dz}{z} = 0$

مثال: $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i(\cos t + i \sin t)}{\cos t + i \sin t} dt$

$= 2\pi i$





معادله پارامتری دایره به معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$ عبارت است از:

$C: \begin{cases} x = a\cos t + \alpha \\ y = a \sin t + \beta \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

فرمول کلی: $z = z_0 + Re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$|z| = 1 \rightsquigarrow z(t) = \cos t + i \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = z'(t)\, dt$

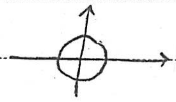
$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}\, i e^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$



$|z|=1 \Rightarrow z = e^{it} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \quad , \quad dz = ie^{it}dt \qquad \bar{z} = e^{-it}$

راه دوم : $z\bar{z} = |z|^2 \qquad |z|=1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

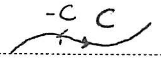
$$\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

خواص انتگرال یک تابع مختلط با متغیر مختلط

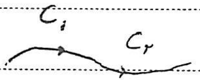
1) $\int_C (f(z) \pm g(z))\, dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)\, dz$

2) $\int_C \gamma f(z)\, dz = \gamma \int_C f(z)\, dz \qquad \gamma \in \mathbb{C}$

3) $\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$



4) $\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$



$l_{C_1 \cap C_2} = 0$

$C: C_1 + C_2$

5) $\left|\int_C f(z) dz\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,|dz|$

در حالتی که معادله پارامتری خم C به صورت زیر باشد

$C: z(t) = x(t) + i y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$

رابطه ۵ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leqslant \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\, dt$$

نکته: طول خم $C = l = \int_C |z'(t)|\, dt$

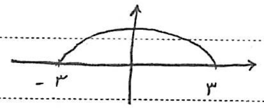
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال. طول خم $z(t)=3\cos t+3i\sin t$ ، $0\le t\le \pi$ را بیابید.

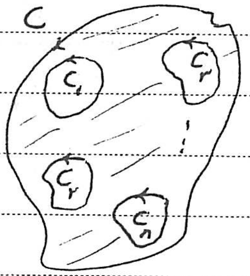
$z'(t)=-3\sin t+3i\cos t \qquad |z'(t)|=\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}=3$

$l=\int_0^{\pi}|z'(t)|\,dt=\int_0^{\pi}3\,dt=3\pi$



قضیه. هرگاه $f(z)$ روی خم‌های بسته، ساده و غیرمتقاطع $C_1, C_2, \dots, C_n$ و C و ناحیه بین آنها تحلیلی باشد (مطابق شکل) در این صورت

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_{C_1} f(z)\,dz+\oint_{C_2} f(z)\,dz+\dots+\oint_{C_n} f(z)\,dz$$



مثال. $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i \qquad \oint_{|z|=3}\frac{dz}{z}=2\pi i$

$\oint_{|z|=1}\bar z\,dz=2\pi i \qquad \oint_{|z|=3}\bar z\,dz=18\pi i=\left(\oint_{|z|=3}9\frac{dz}{z}\right)$

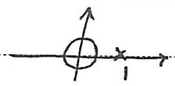
$* \; z\bar z=|z|^2 \rightarrow \bar z=\frac{9}{z}$

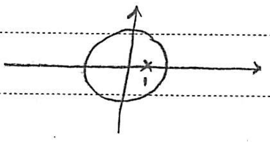
هرگاه $f(z)$ درون و روی خم بسته ساده C تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه درون خم باشد:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i\, f(z_0)$$

(جهت حرکت روی خم C جهت دایره مثلثاتی است.)

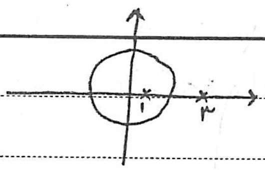
$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2+1}{z-1}\,dz=0 \qquad \oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z-1}\,dz=4\pi i$





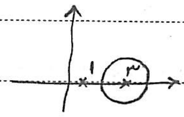
مثال: $\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{(z-1)(z-3)}\,dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z-3}\,dz-\frac{1}{2}\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z-1}\,dz=-\frac{1}{2}\left(2\pi i(2)\right)=-2\pi i$

راه دوم: $\oint_{|z|=2} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z-3}\right)}{z-1}\, dz = -2\pi i$



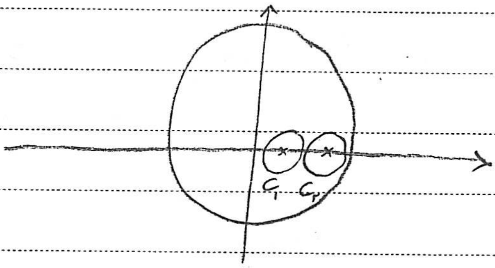
مثال. $\oint_{|z-3|=1} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-3)}\, dz = \frac{1}{2}\oint_{|z-3|=1} \frac{z^2+1}{z-3}\, dz - \frac{1}{2}\oint_{|z-3|=1} \frac{z^2+1}{z-1}\, dz = \frac{1}{2}\left(2\pi i(10)\right) = 10\pi i$

راه دوم: $\oint_{|z-3|=1} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)}{z-3}\, dz = 10\pi i$



مثال $\oint_{|z|=4} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-3)}\, dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=4} \frac{z^2+1}{z-3}\, dz - \frac{1}{2}\oint_{|z|=4} \frac{z^2+1}{z-1}\, dz = \frac{1}{2}\left(2\pi i(10)\right) - \frac{1}{2}\left(2\pi i(2)\right) = 8\pi i$

راه دوم: $\oint_{C_1} \frac{\frac{z^2+1}{z-3}}{z-1}\, dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z-3}\, dz = 2\pi i(-1) + 2\pi i(5) = 8\pi i$



فرمول مشتق (تعمیم فرمول انتگرال کوشی)

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

فرمول مشتق

مثال. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{(z-1)^2}\, dz = 2\pi i\,(z^2+1)'\Big|_{z=1} = 4\pi i$

مثال $\oint_{|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{3}} \frac{\ln(z^2+1)}{(2z-i)^2}\, dz = \frac{1}{4}\oint_{|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{3}} \frac{\ln(z^2+1)}{(z-\frac{i}{2})^2}\, dz = \frac{1}{4}\times 2\pi i\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)\Big|_{z=\frac{i}{2}}$

$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{i}{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$

نکته: هر بسط تیلور و مک‌لورن می‌توانند بسط لوران باشند ولی بر عکس آن درست نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ سری‌های لوران

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

$\begin{cases} \sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ \cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots \end{cases} \xrightarrow{+} e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$

* $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad |z|<1$ $\frac{1}{1+z} = 1 - z^2 + z^3 - z^4 + \dots \quad |z|<1$

$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots$ $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots$

مثال: بسط مک‌لورن $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ را بیابید.

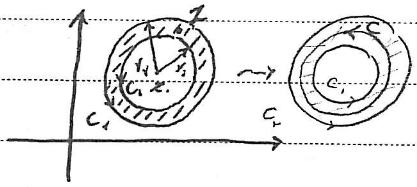
$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots \xrightarrow{\times z} \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$

مثال ۱. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ بسط لوران حول $z=0$

مثال ۲. $\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \frac{1}{z^7 7!} + \dots$

قضیه نمایش با سری لوران:

هرگاه C_1 و C_2 دو دایره متحدالمرکز به مرکز z_0 به ترتیب به شعاع‌های r_1 و r_2 باشند ($r_1 < r_2$) و $f(z)$ روی C_1 و C_2 و طوق بین آنها تحلیلی باشد در این صورت به ازای هر z متعلق به این ناحیه داریم



$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad r_1 < |z-z_0| < r_2$

قسمت اصلی سری لوران

این بسط به بسط لوران $f(z)$ حول $z = z_0$ موسوم است.

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

PAPCO

$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران $f(z)$ حول $z=z_0$ را هرگاه ناحیه همگرایی به شکل $0<|z-z_0|<r$ باشد، مانده $f(z)$ در $z=z_0$ می‌نامیم (منظور همان b_1)

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1$$

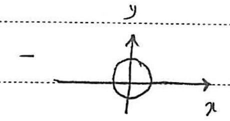
$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

قضیه مانده:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i$$ (مجموع مانده‌های $f(z)$ در نقاط تکین درون خم بسته)

مثال $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i(1) = 2\pi i$

تنها نقطه تکین $\frac{1}{z}$ صفر برابر $z=0$ است که درون $|z|=1$ قرار دارد.

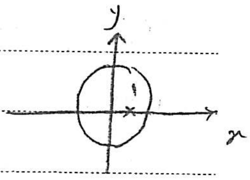


$\operatorname{Res}_{z=0} \sin\frac{1}{z} = 1$

ضریب $\frac{1}{z} = 1$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \cdots$$

مثال $\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z-1}}\,dz = 2\pi i$



$\operatorname{Res}_{z=1} e^{\frac{1}{z-1}} = 1$

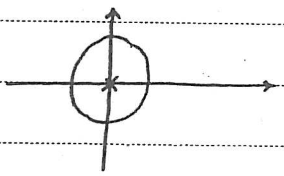
ضریب $\frac{1}{z-1} = 1$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \frac{1}{(z-1)^3 3!} + \cdots$$

مثال $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right)$

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^4 4!} + \cdots\right)$$



$\operatorname{Res}_{z=0} z^3 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{4!}$

ضریب $\frac{1}{z} = \frac{1}{4!}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$z^2 = ((z-1)+1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$

$$\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z-1}}\, dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3!}+\frac{2}{2!}+1\right)$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = z^2\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{3!}+\frac{2}{2!}+1$$

$$= \left((z-1)^2+2(z-1)+1\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\frac{1}{(z-1)^3 3!}+\cdots\right)$$

ضریب $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3!}+\frac{2}{2!}+1$

$$f(z) = f(1) + (z-1)f'(1) + \frac{(z-1)^2}{2!}f''(1) + \cdots$$

$$z^2 = 1 + (z-1)\times 2 + \frac{(z-1)^2}{2!}\times 2$$

$f(z) = z^2 \Rightarrow f(1) = 1$

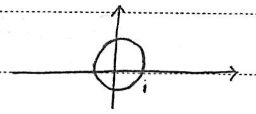
$f'(z) = 2z \Rightarrow f'(1) = 2$

$f''(z) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2$

$f'''(z) = 0 \Rightarrow f'''(1) = 0$

$\forall n \geq 3 \quad f^{(n)}(z) = 0 \Rightarrow \forall n \geq 3 \Rightarrow f^{(n)}(1) = 0$

$$\oint_{|z|=1} z^4 \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i\left(\frac{1}{5!}\right)$$



$$z^4 \sin\frac{1}{z} = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \cdots\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^4 \sin\frac{1}{z} \overset{?}{=} \frac{1}{5!}$$

ضریب $\frac{1}{z} = \frac{1}{5!}$

مثال. $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = 1-e$

$* \ \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots$

$e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\cdots$

$z=1 \to e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

ضریب $\frac{1}{z} = -\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right) = 1-e$

$$\frac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\cdots\right)$$

$$= -\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\cdots\right)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots$$

هرجا تابع تحلیلی باشد مانده آن صفر است.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}=1-e^{-1}$$

$$z=-1\to e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdots$$

$$\to 1-e^{-1}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots$$

ضریب $\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots=1-e^{-1}$

$$\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)$$

$$=\left(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2+1}=0$$

ضریب $\frac{1}{z}=0$

$$\frac{1}{z^2+1}\cos\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2+1}\left(1-\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^4 4!}-\frac{1}{z^6 6!}+\cdots\right)$$

$$=\left(1-z^2+z^4-z^6+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^4 4!}-\cdots\right)$$

$\frac{1}{z}$ تولید نمی کند پس ضریب آن صفر است.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-1}=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{1}{z-1}=0$$

$$\frac{1}{1+(z-2)}=1-(z-2)+(z-2)^2-\cdots$$

ضریب $\frac{1}{z-2}$ را نمی سازد.

ضریب $\frac{1}{z-1}=1$

$$\frac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)$$

بسط $\frac{1}{z-1}$ حول $z=1$ خودش است

بسط $\frac{1}{z-1}$ حول $z=0$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+\cdots)$$

حدود اعتبار $|z|<1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)$$

حدود اعتبار $\left|\frac{1}{z}\right|<1 \rightarrow |z|>1$

بسط $\frac{1}{z-1}$ حول $z=2$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \left(1-(z-2)+(z-2)^2-\dots\right)$$

$$|z-2|<1$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right) = \frac{1}{z-2}\left(1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\dots\right)$$

$$\left|\frac{1}{z-2}\right|<1 \Rightarrow |z-2|>1$$

بسط $\frac{1}{z-1}$ حول $z=3$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{z-3}{2}\right)+\left(\frac{z-3}{2}\right)^2-\dots\right)$$

۱) ابتدا ساختن حول $z=z_0$

۲) { کوچکتر ... از عدد / بزرگتر ... از عبارت }

$$\left|\frac{z-3}{2}\right|<1 \quad \text{یا} \quad |z-3|<2$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{z-3}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z-3}} = \frac{1}{z-3}\left(1+\frac{2}{z-3}+\frac{4}{(z-3)^2}+\dots\right)$$

$$\left|\frac{2}{z-3}\right|<1 \rightarrow |z-3|>2$$

بسط $\frac{1}{z-2}$ حول $z=0$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots\right)$$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<1 \quad \text{یا} \quad |z|<2$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right)$$

$$\left|\frac{2}{z}\right|<1 \quad \text{یا} \quad |z|>2$$

PAPCO

Subject: $r_1 < |z - z_0| < r_2$

Year. Month. Date. ( ) حول z_0

مسئله لوران: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ را در بازه $1 < |z| < 2$ بیابید.

[حول صفر]

تحلیل کسر

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right)$$

$|z| < 1$ و $|z| > 2$

$1 < |z| < 2$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

← نقش نقطه دارد.

$$|z| > 2 \rightsquigarrow \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$$|z| < 1 \rightsquigarrow \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{z-1} = -\left(1 + z + z^2 + \dots\right)$$

$$\underset{z=0}{Res}\ \frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{-1}{3!}$$

ضریب $\frac{1}{z} \overset{?}{=} -\frac{1}{3!}$

تقسیم کردن صورت به مخرج

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)} = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)z^4 \dots\right)$$

سه نوع نقطه تکین — تکین اساسی: تعداد جملات با توان منفی بی‌نهایت شود مثل $\sin\frac{1}{z}$ در $z=0$ تکین اساسی

مثال $e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \dots$ بی‌نهایت جمله

$z=1$ تکین اساسی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تکین رفع شدنی: نقطه ای که تابع را حول آن بسط دهیم، توان منفی تولید نشود.

اگر تکین رفع شدنی باشد، مانده صفر است

مثال: $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)$

$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ $z=0$ تکین رفع شدنی

تکین قطبی: نقطه ای که تابع را حول آن بسط دهیم،
تعداد متناهی جمله با توان منفی داشته باشیم.

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$b_m \neq 0$ $z=z_0$ را یک قطب مرتبه mام $f(z)$ می نامیم.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{z-1} - (z-1) + (z-1)^3 - \dots$$

$z=1$ قطب مرتبه ۵ام

اگر z_0 یک قطب مرتبه mام $f(z)$ باشد، مانده $f(z)$ در $z=z_0$ از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

مشتق مرتبه $(m-1)$ام

نکته: z_0 را یک صفر مرتبه nام $f(z)$ گوییم هرگاه

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

مثال: $z=0$ صفر مرتبه چندم $f(z) = 1-\cos z$ است؟

$f(0) = 0$

$f'(z) = \sin z \rightsquigarrow f'(0) = 0$

$f''(z) = \cos z \rightsquigarrow f''(0) = 1 \neq 0$ $z=0$ صفر مرتبه دوم است

PAPCO

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)}\,dz = 0$$

مثال $f(z) = \dfrac{(z-1)^3(z-5i)^3(z+3)}{(z^2-1)^9(z^2+25)^7(z+3)^6(z^2-49)^4}$

-7 قطب مرتبه ۴

$-5i$ " ۷

-3 " ۵

-1 " ۹

1 " ۶

$5i$ " ۴

7 " ۴

مثال $\operatorname{Res}_{z=2} \dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\left((z-2)\dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)}\right) = 5$

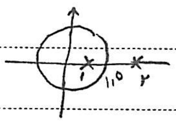
$z=2$ قطب مرتبه اول $(m=1)$

قطب مرتبه اول را قطب ساده نیز می‌نامند.

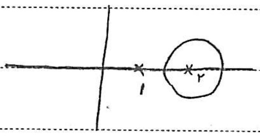
مثال $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)} = \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)}\right)' = \lim_{z\to 1}\dfrac{2z(z-2)-(z^2+1)}{(z-2)^2} = -4$

$z=1$ قطب مرتبه دوم $(m=2)$

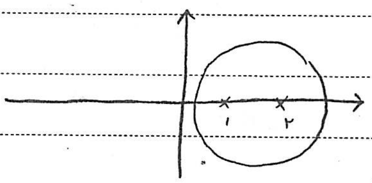
$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z-2)} = 2\pi i(-4)$$



$$\oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \text{"} = 2\pi i(5)$$

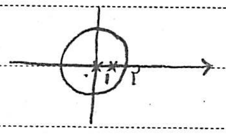


$$\oint_{|z|=4} \text{"} = 2\pi i(5-4) = 2\pi i$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i(\sin 1 - \sin 1) = 0$$



نقاط تکین درون $|z|=2$
عبارت اند از
$z=0$ تکین اساسی
$z=1$ قطب ساده $(m=1)$

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z} = \lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right) = \sin 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$$

$* \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots$

ضریب $\frac{1}{z} \overset{?}{=} -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots\right) = -\sin 1$

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \dots\right)$$

$$= -(1+z+z^2+\dots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \dots\right)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z}\, dz =$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z} = \lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z} = \frac{1}{e}$$

$z=1$ تکین اساسی
$z=0$ قطب ساده $(m=1)$

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z} = 1 - e^{-1}$$

ضریب $\frac{1}{z-1} = 1 - e^{-1}$ قبلاً محاسبه شده است

$$\to 2\pi i(1 - e^{-1} + e^{-1}) = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z}\sin\frac{1}{z-1}\, dz = ?$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\cos\frac{1}{z}\, dz = ?$$

$$\oint \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z-1}\, dz = ?$$

$$\oint e^{\frac{1}{z}}\, dz = ? \quad 2\pi i(2-e)$$

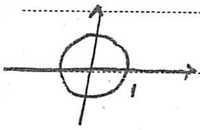
PAPCO

Subject: Year. Month. Date. ( )

$\sin\frac{1}{z} \neq \frac{1}{\sin z}$

$$\int \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i (1)$$

$|z|=1$



$\sin z = 0 \rightarrow z = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$

تنها $z=0$ درون $|z|=1$ قرار دارد

قطب ساده $(m=1)$

راه دیگر $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots}$

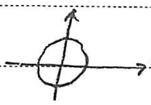
$f(z) = \sin z \rightarrow f(0) = 0$

$f'(z) = \cos z \rightarrow f'(0) = 1 \neq 0$

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} z \times \frac{1}{\sin z} \overset{\text{هم ارزی}}{=} 1$$ یا $$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} = \left[\frac{1}{\cos z}\right]_{z=0} = 1$$

$$\int \frac{e^z - z - 1}{\sin^3 z} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

$|z|=1$



$\sin^3 z = 0 \rightarrow \sin z = 0 \rightarrow z = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$

تنها $z=0$ درون $|z|=1$ قرار دارد

و قطب ساده است (۳ بار مخرج و ۲ بار صورت را صفر می‌کند ، $m=1$)

$f(z) = e^z - z - 1 \rightarrow f(0) = 0$

$f'(z) = e^z - 1 \rightarrow f'(0) = 0$ پس صفر

$f''(z) = e^z \rightarrow f''(0) \neq 0$ مرتبه دو

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z - z - 1}{\sin^3 z} = \lim_{z\to 0} z \frac{e^z - z - 1}{\sin^3 z} \overset{\sin \text{ هم ارزی}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z - z - 1}{z^2} \overset{Hop}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{2z} \overset{Hop}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\oint \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} dz = 0$$ $z=0$ تکین رفع شدنی (دو بار مخرج و دو بار صورت را صفر می‌کند.)

$|z|=1$

$f(z) = 1 - \cos z \rightarrow f(0) = 0$

پس مانده صفر است.

$f'(z) = \sin z \rightarrow f'(0) = 0$ صفر مرتبه دو

$f''(z) = \cos z \rightarrow f''(0) \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} f(z)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\times 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)=\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ $\qquad 1+z^2=0 \begin{cases} z=i \ ✓ \\ z=-i \end{cases}$ $\qquad \operatorname{Res}_{z=i}\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right)=\frac{1}{2i}$

$(m=1)$

$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$ $\qquad$ نکته: هرگاه z_0 یک قطب ساده $f(z)=\frac{P(z)}{q(z)}$ باشد

$\operatorname{Res}_{z=i}\frac{1}{1+z^2}=\left[\frac{1}{2z}\right]_{z=i}=\frac{1}{2i}$

مثال $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}=2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}$

$f(z)=\frac{1}{(z^2-2z+2)^2}$ $\qquad \operatorname{Res}_{z=1+i}\frac{1}{(z^2-2z+2)^2}=\lim_{z\to 1+i}\left((z-(1+i))^2\frac{1}{(z-(1+i))^2(z-(1-i))^2}\right)'$

$=\lim_{z\to 1+i}\frac{-2}{(z-1+i)^3}$

$(z^2-2z+2)^2=0 \begin{cases} 1+i \ ✓ \\ 1-i \end{cases}$ $\qquad$ $z=1+i$ یک قطب مرتبه دوم $(m=2)$

$=\frac{-2}{8i^3}=\frac{-2}{-8i}=\frac{1}{4i}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx=\operatorname{Re}\ 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)e^{iaz}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx=\operatorname{Im}\ 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)e^{iaz}$

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{e^{-6}}{6i}\right)=\frac{\pi e^{-6}}{6}$

$f(z)=\frac{1}{z^2+9} \Rightarrow z^2+9=0 \begin{cases} 3i \ ✓ \\ -3i \ ✗ \end{cases}$

$a=2$

$\operatorname{Res}_{z=3i}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}=\left[\frac{e^{2iz}}{2z}\right]_{z=3i}=\frac{e^{-6}}{6i}$

Subject: تمرین: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

۲ نمره انتگرال (مانده ، پایه انتگرال آخری)

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{K^2+w^2}\,dw = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx}{K^2+w^2}\,dw = \frac{1}{2} Re\left(2\pi i \frac{e^{-Kx}}{2iK}\right) = \frac{\pi}{2K} e^{-Kx}$$

$f(z) = \frac{1}{K^2+z^2}$ $\quad a = x$

$$\underset{z=iK}{Res} \frac{e^{ixz}}{z^2+K^2} = \left[\frac{e^{ixz}}{2z}\right]_{z=iK} = \frac{e^{-Kx}}{2iK}$$

$z^2+K^2=0$: $z=iK$ ✓ ، $z=-iK$ ×

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\,dx = Im\left(2\pi i \frac{(1+i)e^{i(1+i)}}{2i}\right) = Im\left(\pi(1+i)e^{i(1+i)}\right) = Im\left(\pi e^{-1}(1+i)e^{i}\right)$$

$f(z) = \frac{z}{z^2-2z+2} = 0$: $1+i$ ✓ $(m=1)$ ، $1-i$ ×

$$\underset{z=1+i}{Res} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2} = \left[\frac{ze^{iz}}{2z-2}\right]_{z=1+i} = \frac{(1+i)e^{i(1+i)}}{2i}$$

$a=1$

$$* \quad (1+i)e^{i} = (1+i)(\cos 1 + i\sin 1) = \cos 1 + i\sin 1 + i\cos 1 - \sin 1$$

$\int$ داخواسته $= \pi(e^{-1})(\cos 1 + \sin 1)$

اگر به جای sin ، cos بود $\rightsquigarrow \pi(e^{-1})(\cos 1 - \sin 1)$

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} F\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$$

$z\bar{z} = |z|^2$

مثال.
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2-\frac{z+z^{-1}}{2}} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{4-z-z^{-1}}{2}} = \frac{-2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1} = -\frac{2}{i} \times 2\pi i\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$z^2-4z+1=0$: $2-\sqrt{3}$ ✓ ، $2+\sqrt{3}$

$$\underset{z=2-\sqrt{3}}{Res} \frac{1}{z^2-4z+1} = \left[\frac{1}{2z-4}\right]_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

تمرین:
$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta} \overset{\text{حل}}{=} \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

PAPCO

$\sin m\theta = \frac{z^m - z^{-m}}{2i}$

Subject. $\cos m\theta = \frac{z^m + z^{-m}}{2}$
Year. Month. ۲ Date. ( )

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\sin\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5-4\,\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{\frac{5i-2z+2z^{-1}}{i}} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{2z^2-5iz-2}\, dz \times \frac{z^2}{z^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5iz-2)}\, dz = -\frac{1}{2}\times 2\pi i\left(\frac{17}{12}i + \frac{5}{4}i\right) = -\pi i\left(\frac{8}{3}i\right) = \frac{8\pi}{3}$$

$$2z^2-5iz-2=0 \Rightarrow z = \frac{5i \pm \sqrt{-25+16}}{4} = \frac{5i \pm 3i}{4} \begin{cases} 2i \\ \frac{i}{2}\ \checkmark \end{cases}$$

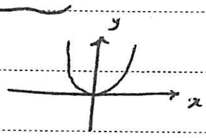
نقاط تکین درون $|z|=1$ عبارت اند از:

$z=0$ قطب مرتبه دوم $(m=2)$

$z=\frac{i}{2}$ قطب ساده $(m=1)$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i}{2}} \frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5iz-2)} = \left[\frac{z^4+1}{8z^3-15iz^2-4z}\right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{17}{12i}$$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$



$f(x)=x^2 \qquad G=\{(x,y);\ y=x^2\}$

نکته: توابع مختلط قابل رسم نیستند

$f(z)=z+\alpha+i\beta$ نگاشت انتقال.

$u+iv = x+iy+\alpha+i\beta$

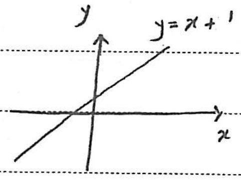
مثال. تصویر خط $y=x+1$ را تحت نگاشت $f(z)=z+1+3i$ بیابید.

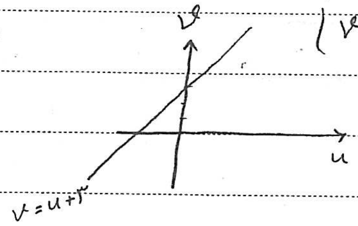
$u=x+\alpha \rightsquigarrow x=u-\alpha$
$v=y+\beta \rightsquigarrow y=v-\beta$

$u+iv = x+iy+1+3i$

$\begin{cases} u=x+1 \\ v=y+3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=u-1 \\ y=v-3 \end{cases} \qquad y=x+1 \rightsquigarrow v-3=u-1+1$

$v=u+3$





(۱و۳) بردار انتقال

ادامه سوال بالا

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5iz-2)} = \lim_{z\to 0}\left(z^2 \times \frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5iz-2)}\right) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Subject: $-1 = 1e^{i\pi}$, $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$

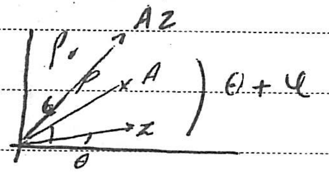
Year. Month. Date. ( )

نگاشت A عدد ثابت $f(z) = Az \quad A \in z$

(انقباض - انبساط - همراه دوران)

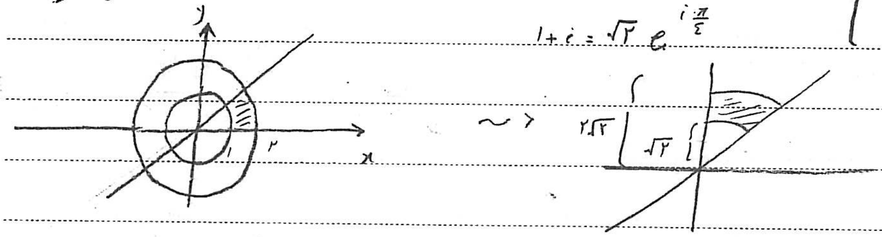
$A = \rho e^{i\varphi}$

$z = re^{i\theta}$ $\quad * \; f(z) = Az = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$

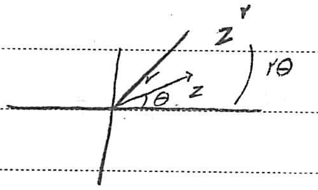


تصویر ناحیه $D: \begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ y \le x \quad y \ge 0 \end{cases}$ را تحت نگاشت $f(z) = (1+i)z$ بیابید.

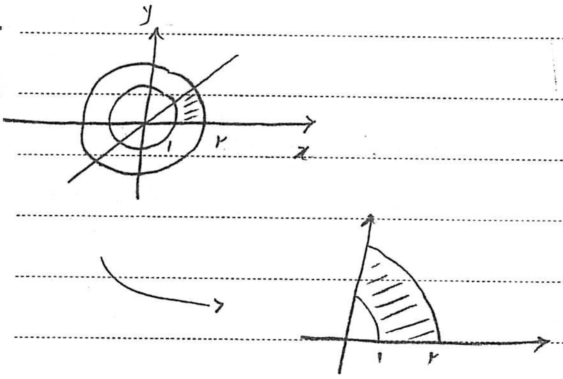
$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$



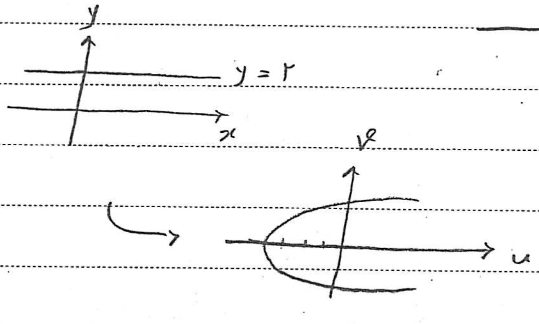
$f(z) = z^2 \qquad z^2 = r^2 e^{2i\theta}$



مثال بالا را تحت نگاشت $f(z) = z^2$:



تصویر خط $y=2$ را تحت $f(z) = z^2$ بیابید.



$f(z) = z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \quad y = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} u = x^2 - 4 \\ v = 4x \to x = \frac{v}{4} \end{cases}$

$u = \frac{v^2}{16} - 4$

Subject: نیوشا داوری

Year. Month. Date. ( )

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = Im(2\pi i \times -ie^{i-1}) = Im(+2\pi e^{i-1}) = Im(+2\pi e^{-1}e^{i}) = +2\pi e^{-1}\sin 1$

$f(z) = \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} = 0 \begin{cases} 1+i \checkmark \ (m=2) \\ 1-i \times \end{cases}$

$\underset{z=1+i}{Res}\ \frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+2)^2} = \lim_{z\to 1+i}\left((z-(1+i))^2 \times \frac{ze^{iz}}{(z-(1+i))^2(z-(1-i))^2}\right)'$

$a=1$

$= -\lim_{z\to 1+i} e^{iz}(1+iz) = -e^{i-1}(1+i^2+i) = -ie^{i-1}$

$* \ e^{i} = \cos 1 + i\sin 1 \rightarrow +2\pi e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1) \xrightarrow{Im} +2\pi e^{-1}\sin 1$

جواب: $\frac{\pi}{4}e^{-1}(\cos 1 + 3\sin 1)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = Re(+2\pi e^{-1}e^{i}) = +2\pi e^{-1}\cos 1$

راه حل مشابه تمرین ۱ با

جواب: $\frac{\pi}{e}e^{-1}(3\cos 1 - \sin 1)$

3) $\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{3+2\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{3+z+z^{-1}} = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+3z+1} = \frac{1}{2i}\times 2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

$z^2+3z+1=0 \begin{cases} -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \checkmark \ (m=1) \\ -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \times \end{cases}$

$\underset{z=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{Res}\ \frac{1}{z^2+3z+1} = \left[\frac{1}{2z+3}\right]_{z=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )